МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГІЙ ТА ДИЗАЙНУ

СТАТИСТИЧНА ОБРОБКА РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЬ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ В ТЕКСТИЛЬНІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Київ 2012

УДК 677.064.81(075)

Статистична обробка результатів вимірювань та експериментальних даних в текстильній промисловості: навчальний посібник / Упор.: О.Б. Демківський, С.М. Краснитський, Ю.М. Пилипенко, А.М. Слізков – К.: КНУТД, 2012.– 106 с. Укр. мовою.

Розглянуто та схвалено Вченою КНУТД 28.12.2011 р. протокол №4

В навчальному посібнику сформульовано основні принципи проведення активного та пасивного експерименту. Сформульовано принципи побудови математичних моделей процесів різної природи, наведено основні поняття та співвідношення теорії ймовірності та математичної статистики. Розглянуто можливість обробки статистичних даних, отриманих в результаті проведення експериментів. Причому розглянуто підходи для обробки детермінованих даних, незалежних випадкових величин та випадкових часових рядів.

Розраховано на студентів спеціальності 7.091803 „Прядіння натуральних та хімічних волокон”, аспірантів, викладачів, а також усіх бажаючих професійно обробляти статистичні дані.

Рецензенти:

д.т.н., проф. кафедри математичної інформатики Київського національного університету ім. Тараса Шевченка В. А. Заславський,

д.т.н., проф. кафедри математичних методів системного аналізу Національного технічного університету „Київський політехнічний інститут” П. І. Бідюк

Вступ 5
2. Передумови експерименту 8
3. Короткі відомості з теорії ймовірностей 10
4. Основні поняття математичної статистики 23
5. Моделювання детермінованих результатів експерименту 25
6. Обробка незалежних результатів стохастичних ксперименті 29
Ранжування вибірки. Ранг вибіркових елементів 31
Групування вибірки. Полігон і гістограма 32
Вибіркові аналоги функції та щільності розподілу 34
Точкові статистичні оцінки основних числових параметрів випадкової величини 37
Критерії якості точкових статистичних оцінок 39
Обчислення статистичних оцінок основних числових параметрів випадкової величини 39
Статистичні оцінки показників симетричності розподілу 41
Статистичні оцінки квантилів 41
Інтервальні оцінки параметрів нормально розподіленої випадкової величини 43
Перевірка статистичних гіпотез 44
Гіпотези відносно ймовірностей та середніх значень 46
Перевірка статистичних гіпотез про нормальність розподілу ймовірностей 49
Зауваження, щодо виключення випадкових незалежних експериментальних даних, що різко виділяються 54
7. Обробка залежних випадкових результатів експерименту. Статистичний аналіз часових рядів 55
Перевірка стаціонарності процесу 56
Моделювання і прогнозування технічних та технологічних процесів 56
Етапи побудови моделі часового ряду 58
Методи моделювання та вилучення детермінованих і стохастичних трендів 66
Моделі, стаціонарні відносно різниць та тренду 67
Перевірка часових рядів на гетероскедастичність 70
Прогнозування часових рядів 74
8. Перевірка відтворюваності або однорідності процесу 79
9. Оцінювання невизначеності вимірювання результатів кількісних вимірювань 81
Додатки 91
Додаток 2. Таблиця квантилів розподілу Стьюдента з n ступенями волі 92
Додаток 3. Таблиця квантилів розподілу χ^2 з n ступенями волі 93
Додаток 4. Критичні точки статистикм Кочрена G_T [P_D=0,95; f = m – 1, n] 95
Додаток 5. Таблиця квантилів розподілу для F – розподілу Фішера 96
Додаток 6. Метод максимальної правдоподібності (ММП) 97
Додаток 7. Перевірка статистичних гіпотез методом χ^2 102

Алфавітний покажчик 104
Літературні джерела 105

Вступ

Характерною особливістю виробництв текстильної та легкої промисловості є суттєва масовість виробничих процесів. Практично в кожному текстильному виробництві загальними елементами є приймання сировини, випуск напівфабрикатів різними виробничими підрозділами (цехами тощо), приймання їх іншими підрозділами, а також випуск готової продукції. На всіх зазначених етапах обов'язково проводиться дослідження властивостей різних волокнистих продуктів (напівфабрикатів) текстильного виробництва та здійснюється контроль якості продукції.

Так як кожен виробничий процес текстильної та швейної промисловості є масовим явищем, то кожне з них (сировина, напівфабрикати та готова продукція) може бути представлене у формі тих або інших сукупностей однорідних об'єктів, які в подальшому будемо називати статистичними сукупностями.

Кожна статистична сукупність об'єктів має різні ознаки. За цими ознаками можливо вивчати цю сукупність. Ознакою статистичної сукупності об'єктів є та чи інша властивість, яка характеризує елементи цієї сукупності. Для волокон в паці — це довжина та тонина волокон, їх лінійна густина, міцність та звитість тощо. Для пряжі – міцність, скручення, лінійна густина тощо. Статистична сукупність є одним з основних об'єктів які вивчає математична статистика.

Ознаки статистичної сукупності, що розглядаються у даному посібнику, можуть бути кількісними (можуть вимірюватися) та якісними, якщо можливо визначати тільки наявність або відсутність певної властивості (є брак або ні тощо).

Кількісні ознаки можуть змінюватися неперервно або дискретно, що залежить від того, можуть вони приймати любі значення в деякому інтервалі або лише тільки окремі значення. В якості прикладу можна навести обхват грудей або зріст людини як неперервну ознаку, а кількість обривів нитки за годину та кількість одиниць продукції як дискретну.

Відомо [8, 22, 23, 24], що найбільш досконалими методами з визначення якості сировини, волокнистих продуктів текстильного та швейного виробництва, а також з моделювання процесів створення виробів вказаних виробництв є методи математичної статистики і теорії випадкових процесів.

Математична статистика є наукою про закономірності та методи вивчення масових явищ, які представлені у вигляді сукупностей однорідних об'єктів (статистичних сукупностей). Сучасна математична статистика базується, у великій мірі, на основних положеннях і методах теорії ймовірностей.

Розвитку теорії ймовірностей і математичної статистики приділяли увагу багато видатних вчених. Серед них можна відзначити Я. Бернуллі, Н. Бернуллі, Д. Бернуллі, П. Лапласа, К. Гаусса, С. Пуассона, П.Л. Чебишова, А.М. Ляпунова, А.А. Маркова, М.В. Остроградського, завдяки яким, з одного боку дістала високого степеню розвитку теорія, а з іншого — було відкрито і реалізовано різноманітні можливості її застосувань.

Значний внесок в розвиток теорії ймовірностей, математичної статистики, випадкових процесів і їх застосувань внесли А.М. Колмогоров, В.І. Романовський, Н.В. Смірнов, Б.В. Гнеденко, І.І. Гіхман, А.В. Скороход В. Госсет, Р. Фішер, К. Пірсон , Д. Коуден, В. Хальд, Л. Клемм, А.Я. Хінчин, Ю.К. Бєляєв, В. Шьюхарт, інші вчені. Їх роботи, суттєво збагатили знання у даній сфері науки і проклали нові шляхи практичного застосування математичної статистики і теорії випадкових процесів для вирішення різноманітних задач у різних виробничих процесах.

Важливим застосування математичної статистики є сукупність методів статистичного контролю якості промислової продукції, які дозволяють значно зменшити кількість контрольних операцій, що дуже важливо, наприклад для виявлення невідповідної до вимог нормативної документації (НД) продукції. Методи математичної статистики дозволяють науково обґрунтувати кількість вимірювань, яке потрібно для певних випадків, щоб забезпечити необхідну точність. Також методи математичної статистики дозволяють, крім контролю за якістю сировини, напівфабрикатів та готової продукції, аналізувати показники якості продукції в процесі її виготовлення та встановлювати взаємозв’язок між окремими показниками якості продукції. Це дозволяє визначати причини погіршення якості продукції і пов’язати їх з порушеннями технологічного процесу і, відповідно, впливати на своєчасне виявлення та усунення причин виникнення браку. За допомогою критеріїв узгодженості математичної статистики можливо встановлювати вплив тих чи інших факторів на певну зміну технологічного процесу, сировини або організації виробництва з метою підвищення якості продукції.

З іншого боку, теорія ймовірнісних (випадкових) процесів становить фундамент визначення теоретичних та практичних основ моделювання та автоматизації технологічних процесів текстильного та швейного виробництва.

1. Пасивний і активний експеримент

Експериментальні методи одержання математичної моделі можуть бути пасивні та активні.

При пасивному експерименті інформацію про параметри процесу або об'єкта отримують при нормальній експлуатації об'єкта, без внесення будь-яких штучних збурень. Часто як результат пасивного експерименту використовують записи в експлуатаційних журналах технологічного обладнання або в журналах технологічного контролю. Проте до такої інформації слід ставитися критично, тому що контролери іноді роблять помилкові записи; крім того, виникають похибки внаслідок неодночасної фіксації даних вимірювань.

В якості даних в пасивних експериментів можуть також бути використані реалізації (діаграми), одержані на реєструючих вимірювальних приладах. Однак ця інформація в силу неперервності її характеру вимагає квантування (дискретизації) у часі, а також узгодження в часі швидкостей записів реалізацій процесів, які у виробничих умовах можуть бути різними.

В даний час посилився інтерес до пасивних методів дослідження, заснованих на статистичній обробці даних. Це обумовлено наявністю великого об’єму інформації про процеси та об'єкти на виробництві, відносно простою організацією пасивного експерименту та значним прогресом обчислювальної техніки, яка забезпечує статистичну обробку великого масиву експериментальних даних. Все сказане вище зумовлює зменшення витрат на проведення пасивного експерименту.

Однак пасивні експериментальні методи дослідження не завжди забезпечують необхідну точність визначення математичної моделі і адекватність її в широкій області зміни вхідних параметрів. Час реєстрації параметрів процесу (об'єкта) у пасивному експерименті зазвичай обмежений, особливо за відсутності датчиків або приладів для безперервного вимірювання. У цьому випадку час вибору проб має бути малим, щоб не порушувався нормальний процес, проте це знижує точність вимірювань.

У даній ситуації доцільно скористатися активними методами експерименту для визначення або уточнення числових значень коефіцієнтів, що входять в математичну модель, тобто доцільно поєднувати пасивний експеримент з активним.

При активному експерименті інформацію про параметри процесу отримують шляхом штучного внесення збурень, тобто змінюють вхідні параметри відповідно до заздалегідь підготовленої програмою (матрицею планування).

Активні методи дослідження є у відомому сенсі є більш універсальними, оскільки припускають деяку свободу у виборі діапазону зміни рівнів факторів і отримання найбільш точних результатів. Проте не завжди і не всюди можливо вносити збурення, тобто змінювати рівень факторів при нормальній експлуатації об'єкта, оскільки це може викликати псування продукції, розлад технологічного процесу і т. п. Крім того, при проведенні активних експериментів вельми скрутно в умовах реально діючого підприємства стабілізувати умови процесу на заданому рівні протягом певного часу.

Найкращі умови для проведення активного експерименту можуть бути створені в лабораторії на експериментальних машинах і стендах, що дозволяють варіювати параметри процесу в дуже широкому діапазоні.

Недолік обох методів полягає в тому, що одержані із їх допомогою моделі прийнятні лише в діапазоні варіювання параметрів, в межах якого були зібрані експериментальні дані. Екстраполяція, а тим більше перенесення результатів експериментально побудованої моделі одного процесу на інший (навіть повністю аналогічний), як правило, абсолютно недопустимі.

При отриманні статистичну моделей об'єкта (системи) використовуються наступні математико-статистичні методи:

1) у пасивному експерименті - регресійний аналіз, кореляційний аналіз, метод послідовного виключення складових функцій;

2) в активному експерименті - класичний або однофакторний план експерименту, факторні плани - ортогональні і рототабельні, центральні композиційні фактори, симплексним плани, D-оптимальні плани і послідовне планування експерименту.

При отриманні динамічних моделей об'єкта (системи процесу) використовуються наступні математико-статистичні методи:

1) в активному експерименті - методи, засновані на подачі пробних збурень відомого виду;

2) у пасивному експерименті - кореляційний, спектральний і динамічний регресійний аналіз.

Вибір методу одержання математичної моделі визначається характеристиками досліджуваного об'єкта (системи, процесу), завданнями дослідження та умовами або передумовами застосування того чи іншого методу.

Виконуваність передумов для застосування даного методу одержання моделі, як правило, перевіряють на етапі попереднього експерименту. Виконання передумов іноді може бути досягнуто шляхом відповідної організації експерименту і методики збору інформації, а також спеціально підібраних функціональних перетворень досліджуваних факторів.

Отримання математичних моделей для складних багатофакторних об'єктів текстильної промисловості експериментально-статистичними методами пов'язано з великим обсягом обчислювальних робіт. Тому ефективність роботи дослідника значно підвищується, якщо він озброєний таким потужним засобом, як сучасна електронна обчислювальна машина.

2. Передумови експерименту

2.1. Підготовка та проведення попереднього експерименту

Підготовка до проведення попереднього експерименту включає низку організаційних і технічних заходів, від старанності виконання яких залежить у більшій мірі успіх експерименту. Дослідник повинен перевірити властивості сировини і матеріалів та встановити відповідність завданням дослідження. Крім того, він повинен перевірити стан обладнання стендів, приладів, не забуваючи

важлива умова: експеримент має проводитися на обладнанні, що знаходиться в робочому стані.

Якщо в роботі застосовуються нові методи та засоби дослідження, то проводяться пробні досліди з розробленою і прийнятою методикою. При цьому дослідник одержує необхідний навик і тренування, перевіряє працездатність датчиків, що реєструють приладів та інших вимірювальних пристроїв, виявляє можливість здійснення прийнятої методики дослідження, а також невраховані особливості експерименту і можливі помилки або похибки. При використанні нових вимірювальних пристроїв проводиться тарируванням їх і визначається точність показань.

За результатами пробних дослідів, якщо виявляється необхідність, в пошукових роботах допрацьовується конструкція стенду, вимірювальних та реєструючих пристроїв, вносяться відповідні поправки в методику експерименту.

Проведення одного етапу необхідно доручати тільки одному виконавцеві, так як заміна виконавців може призвести до накладення суб'єктивних похибок спостереження. Після проведення серії дослідів для кожної досліджуваної закономірності необхідно не накопичувати дані, а обробляти результати досліду з тим, щоб у разі потреби можна було б виправити як методику дослідження так і план (матрицю) експерименту. Своєчасна обробка результатів дозволяє судити про їхню достовірність і, в деяких випадках, усунути підвищене розсіювання експериментальних даних.

2.2. Завдання первинної обробки результатів попереднього експерименту

Залежно від характеру об'єкта і застосовуваних засобів вимірювання вхідних (факторів) і вихідних параметрів результати вимірювання можуть бути представлені

а) в неперервному,
б) дискретному
в) комбінованому вигляді (див. рис. 2.1)

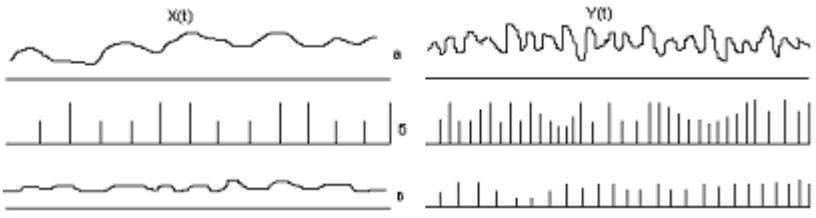


Рис. 2.1. Види експериментальних даних на вході і виході об'єкта, що зустрічаються в текстильній промисловості

Для випадку «а» прикладом може служити зміна товщини стрічки $X(t)$ на вході у прилад і її значення $Y(t)$ на виході з нього. Для випадку «б» прикладом можуть бути результати визначення частки штапельних лавсанових волокон у пробах суміші $X(n)$ на вході кардочесального апарату і ватці - прочісування $Y(n)$ перед його рівничной кареткою. Для випадку «в» прикладом є зміна натягу основи $X(t)$ на ткацькому верстаті або основов'язальної машині і щільності,

відповідно, тканини або в'язаного полотна $Y(t)$, а також зміна товщини стрічки $X(t)$ на вході пневмомеханічного прядильного пристрою та міцності одержуваної пряжі $Y(t)$.

Часто неперервну реєстрацію параметрів перетворюють на дискретну з метою отримання статичних характеристик на цифровій ЕОМ або ручним способом. При цьому повинні дотримуватися певні умови дискретизації.

Зміни багатьох параметрів вхідних і вихідних технологічних процесів описуються випадковими функціями, наприклад зміна товщини продуктів, натягу ниток, міцності пряжі (тканини) на виході прядильної машини (ткацького верстата) і т. п. Для дослідження їх використовується апарат теорії випадкових функцій.

Сукупність невипадкових функцій, отриманих за результатами експериментального дослідження параметрів технологічного процесу, називається реалізацією випадкової функції. Часто ці записи називають діаграмами і осцилограмами.

При дослідженні властивостей продуктів в окремих пробах і пакуваннях, сукупності текстильних волокон в окремих пробах суміші та в перетинах продуктів, характеристик партій готових виробів (наприклад, панчіх, кілець, бігунків і т. п.) отримують сукупності випадкових величин. Для дослідження їх використовується теорія випадкових величин.

Первинна обробка експериментальних даних включає:

1) виключення експериментальних даних, що різко виділяються з решти (аномальні дані);

2) статистичну перевірку випадковості і незалежності результатів вимірювань (випробувань);

3) визначення числових характеристик випадкових величин: середнього, дисперсії або середнього квадратичного відхилення, коефіцієнта варіації та виду розподілу випадкових величин, а також визначення точності і надійності цих величин;

4) визначення виду розподілу ординат реалізації стаціонарної ергодичної випадкової функції, кореляційної функції, спектральної щільності та градієнту нерівноти; визначення надійності цих характеристик;

6) перевірку стаціонарності процесу; визначення прихованих періодичності та наявності дрейфу (тренду) експериментальних даних;

7) перевірку відтворюваності процесу.

3. Короткі відомості з теорії ймовірностей

Елементи комбінаторики

Розміщенням з n елементів по k ($k \le n$) називається впорядкована множина, яка містить k елементів, що вибирається із заданих різних n елементів.

Кількість розміщень з n елементів по k позначається A_n^k і обчислюється за формулою : $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \mathbf{K} \cdot [n-(k-1)]$ або $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Якщо розміщення з n елементів взяті по n елементів (тобто розміщення відрізняються тільки порядком елементів), тоді такі сполучення називають *перестановками*.

Кількість перестановок з n елементів позначається P_n і обчислюється за формулою: $P_n = n!$.

Комбінаціями з n елементів по k називають невпорядковані множини із k елементів, що вибирається з даних n елементів. Кількість комбінацій з n елементів по k позначають C_n^k і обчислюють за формулою:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \mathbf{K} \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ або } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Основні поняття теорії ймовірностей

Розглядається деяка множина Ω, елементи якої і тільки якої можуть з'явитися, під час проведення експерименту. Елементи цієї множини називають *елементарними подіями*, а саму множину *простором елементарних подій*. Будь яка підмножина A множини Ω називається *подією*. Кажуть, що *подія A відбувається*, якщо в експерименті з'являється будь який елемент множини A. Якщо елементи множини Ω з'являються випадково (тобто при однакових умовах проведення експерименту ми не можемо точно визначити результат його дії), експеримент називають випадковим (стохастичними, ймовірнісними).

Операції над подіями і відношення між ними

Об'єднанням (сумою) подій A і B є подія, яка полягає в тому, що відбулась хоча би одна із двух подій A або B і позначається $A \mathbf{U} B$.

Перетином (добутком) подій A і B є подія, яка полягає в тому, що відбулися обидві двух події одночасно A і B і позначається $A \mathbf{I} B$.

Різниця подій A і B є подія, яка полягає в тому, що відбулась подія A і при цьома подія B не відбувається.

Доповненням до події A (або *подією протилежною до A*) називається подія, що позначається $\overline{A}$ і визначається рівністю: $\overline{A} = \Omega - A$.

Якщо $A \mathbf{I} B = \varnothing$, то події A і B називають *несумісними*.

Непуста множина подій R називається *алгеброю подій*, якщо для будь яких елементів, що входять до R виконуються наступні умови:

- якщо $A \in R$ і $B \in R$, то $A \mathbf{U} B \in R$
- якщо $A \in \mathrm{R}$, то $\overline{A} \in R$.

Кажуть, що на алгебрі подій R *задано ймовірність подій*, якщо кожному елементу A, B, C, ... із множини R поставлено у відповідність числа $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, …, що задовольняють наступним умовам:

1. $P(\Omega)=1$; $P(\varnothing) = 0$
2. $0 \le P(A) \le 1$
3. якщо $A \mathbf{I} B = \varnothing$, то $P(A \mathbf{U} B) = P(A) + P(B)$

В цьому випадку числа $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, … називають ймовірностями подій A, B, C, ... відповідно.

Відзначимо, що ймовірність подій, вводиться, щоб оцінити ступінь можливості того, що подія в експерименті відбулася: чим ближче ймовірність до одиниці тим більше шансів, що відповідна подія з'явиться в експерименті, тобто можна сказати, що ймовірність події – це міра можливості з'явлення події в експерименті.

Якщо простір елементарних подій складається із скінченної кількості рівноможливих подій, то ймовірність події A є відношення кількості випадків, які сприяють події A (числа m), до загальної кількості елементів (n) простору елементарних подій, тобто $P(A)=\frac{m}{n}$.

Умовною ймовірністю події A при умові, що відбулася подія B, називається число $P_B(A)$,яке знаходиться за формулою: $P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B)\neq 0$.

З даного визначення випливає:

- *формула множення ймовірностей* $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)=P(A)\cdot P_A(B)$;

- *формула Байєса* $P_A(B)=P_B(A)\frac{P(A)}{P(B)}$, *якщо* $P(A)P(B)\neq 0$.

Події A і B називаються *незалежними*, якщо виконується співвідношення $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

Для двох подій A і B справедлива *теорема додавання*:

$P(A+B)=P(A)+P(B)$ - якщо $A \mathbf{I} B=\varnothing$

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ - для загального випадку.

Повною групою подій називається множина A_1, A_2, ... A_n подій, для яких $A_1 \mathbf{U} A_2 \mathbf{U} \ldots \mathbf{U} A_n=\Omega$, тобто в результаті будь якого випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із цих подій..

Сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу і які є попарно несумісними дорівнює 1.

Якщо $H_1, H_2, \mathbf{K}, H_n$ – повна група попарно несумісних подій, то для будь-якої події A справедлива формула

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\mathbf{K}+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$$ –

формула повної ймовірності.

Схема незалежних випробувань

Незалежними випробуваннями називають послідовність ймовірнісних експериментів, в кожному з яких ймовірність будь якої події не залежить від того, які події трапляються в інших експериментах. Нехай в кожному з незалежних випробувань може з'явитися подія A. Якщо подія A відбувається, то кажемо, що експеримент закінчився *успіхом*, якщо ж подія A не відбулася то експеримент закінчився *невдачею*. *Схемою незалежних випробувань* називається послідовність незалежних випробувань з постійною для кожного експерименту ймовірністю успіху.

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, успіх настане рівно k разів визначається за формулою Бернуллі: $P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, де p $(0<p<1)$

– це ймовірність успіху в одному експерименті, а $q = 1 - p$ ймовірність невдачі, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Сукупність ймовірностей, що обчислюються за наведеною формулою Бернулі, називається біноміальним розподілом (іноді розподілом Бернулі).

Якщо число випробувань n досить велике, тоді для визначення відповідної ймовірності застосовуються деякі граничні теореми теорії ймовірностей – так звані локальні і глобальні теореми Муавра-Лапласа [5]. Ми не будемо наводити точних формулювань зазначених теорем. Замість цього наведемо два наслідки, що мають практичне значення в конкретних обчисленнях, які пов'язані з біноміальним розподілом.

1. *Наслідок з локальної граничної теореми Муавра - Лапласа.*

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях успіх настане рівно k разів, дається наближеною рівністю $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} \cdot j(x)$, де $j(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, p- ймовірність успіху в одному експерименті, q=1-p ймовірність невдачі.

Значення функції $j(x)$ знаходимо в таблиці. При x>5 виконується $j(x) \approx 0$.

2. *Наслідок з глобальної граничної теореми Муавра - Лапласа.*

Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, кількість успіхів лежить між числами k_1 і k_2 $(k_1 \le k_2)$ задається наближеною рівністю: $P(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ - функція Лапласа, $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$, p- ймовірність успіху в одному експерименті, q=1-p ймовірність невдачі. Значення $\Phi(x)$ знаходимо в таблиці. Основні властивості функції Лапласа будуть сформульовані трохи нижче.

Випадкові величини

Випадкова величина X – це змінна величина, яка приймає те чи інше значення в залежності від випадкового результату експерименту.

Відзначимо, що це не точне математичне визначення випадкової величини, але воно дає зрозуміти суть цього поняття: в наслідок одних і тих самих дій при дослідженнями однієї і тої самої величини можна отримати різні результати. Значення випадкової величини не можуть бути однозначно визначені до проведення експерименту. Наприклад, при досліджені нитки на розрив, навряд чи ви отримаєте одні і ті самі числа, якщо проведете декілька однорідних експериментів.

Якщо кількість всіх значеннь, яких може набути випадкова величина, скінченне або зліченне (тобто їх можна пронумерувати за допомогою натуральних чисел) випадкова величина називається *дискретною випадковою величиною*.

Законом розподілу дискретної випадкової величини X називається перелік всіх можливих значень випадкової величини та ймовірностей, з якими вона набуває кожного з цих значень.

Функцією розподілу ймовірностей (або просто функцією розподілу*)* випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка для будь якого дійсного числа x визначається рівністю $F(x) = P(\ x < x)$.

Властивості функції розподілу ймовірностей .

1. Функція $F(x)$ визначена на всій числовій прямій .
2. Значення функції розподілу належать відрізку [0; 1] , тобто $0 \le F(x) \le 1$.
3. Функція розподілу не спадає ,тобто якщо $x_1 < x_2$ ($x_1 \in R$, $x_2 \in R$), то $F(x_1) \le F(x_2)$.
4. Ймовірність того , що в результаті випробувань значення випадкової величини X попадає в інтервал, обчислюється за формулою $P\{a \le V < b\} = F(b) - F(a)$
5. $\lim F(x) = 1$ та $\lim F(x) = 0$ при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$ відповідно.

Випадкова величина x називається *неперервною*, якщо неперервна її функція розподілу $F(x)$. Якщо для будь якого дійсного числа x функція розподілу може бути представлена у вигляді $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, де під знаком інтегралу стоїть невід'ємна функція $f(x)$, то випадкова величина називається *абсолютно неперервною*, а функція $f(x)$ – *щільністю розподілу випадкової величини*.

Властивості щільності розподілу ймовірностей .

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1.$
2. Якщо $f(x)$ неперервна в точці x, то існує похідна функції $F(x)$ і $f(x) = F'(x)$.
3. Ймовірність попадання випадкової величини x в інтервал $(a; b)$ дорівнює інтегралу від щільністю розподілу, взятому в межах від a до b: $P\{a < x < b\} = \int_{a}^{b} f(x)dx.$

Графічно це означає, що ймовірність попадання випадкової величини x в інтервал (a, b) дорівнює площі криволінійної трапеції $y = f(x)$ на інтервалі (a, b) (див. рис. 3.1).

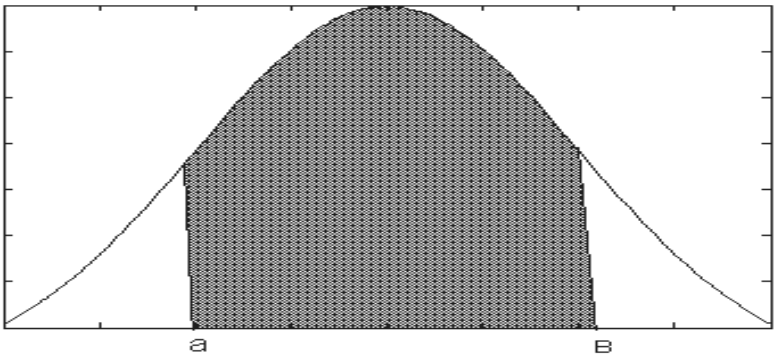


Рис. 3.1.

Однією з важливих властивостей щільності розподілу випадкової величини є: якщо $f(x)$ неперервна в точці x, то існує похідна $F'(x)$ в цій точці функції $F(x)$ і $f(x)=F'(x)$. Остання рівність дає можливість знайти щільність розподілу f, якщо відома функція розподілу F.

Числові характеристики випадкової величини.

Для того, щоб описати ймовірнісну поведінку випадкових величин, використовують функцію розподілу та щільність розподілу випадкової величини. На практиці часто виникають питання, коли потрібні не функціональні, а числові характеристики, які давали б уявлення про поведінку випадкових величин. Наприклад, при досліджені нитки на розрив нас цікавить очікуване навантаження, при якому нитка розірветься, середні відхилення від цього числа і т.д.

Для визначення цих чисел введені числові характеристики випадкових величин. Найбільш важливими із них є *математичне сподівання* - позначається $M(x)$, Mx або $E(x)$, Ex; *дисперсія* - $D(x)$, або Dx і *середнє квадратичне відхилення* - $s(x)$ або sx.

Математичним сподіванням (середнім значенням) випадкової величини є число $M(x)=\sum x_i p_i$ — для дискретної випадкової величини і, $M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ – для абсолютно неперервної випадкової величини.

Основні властивості математичного сподівання.

При визначені властивостей математичного сподівання будемо вважати, що ліві та праві частини співвідношень визначені.

- $M(Cx)=CM(x)$, де C константа;
- якщо $x \geq 0$, то $M(x) \geq 0$;
- $M(x_1 \pm x_2)=M(x_1) \pm M(x_2)$;
- якщо x_1, x_2 незалежні. то $M(x_1 x_2)=M(x_1)M(x_2)$.

Дисперсією (розсіянням) випадкової величини x є число $D(x)=M[x-M(x)]^2$. Неважко довести, що $D(x)=M(x^2)-[M(x)]^2$.

Основні властивості дисперсії.

- $D(x)\geq 0$
- $D(ax)=a^2D(x)$
- якщо x_1, x_2 незалежні, то $D(x_1+x_2)=D(x_1)+D(x_2)$

Середнім квадратичним відхиленням є число $s(x)=\sqrt{D(x)}$

Математичне сподівання випадкової величини показує деяке середнє значення, навколо якого вона коливається, у той час як дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують ступінь розсіювання випадкової величини відносно її середнього значення. Чим більше дисперсія, тим сильніше відхиляються значення випадкової величини від її середнього значення.

Коефіцієнт кореляції

Для знаходження характеристики взаємозв'язку між випадковими величинами x та V в кількісних термінах використовується коефіцієнт кореляції $r=\frac{M(x-Mx)(V-MV)}{s_x\ s_V}$, який коливається у межах [-1; +1]. При значеннях коефіцієнту кореляції, що за модулем близькі до числа 1, кажуть про залежність випадкових величин, в той час коли ж коефіцієнт кореляції близький до 0, про їхню незалежність. Значення чисельника коефіцієнта кореляції називається коваріацією та використовується для визначення зв'язку в абсолютних величинах між двома випадковими величинами $cov(x,V)=M(x-Mx)(V-MV)$.

Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу має велике значення в теорії ймовірностей і займає особливе місце серед інших законів. Цей закон найчастіше зустрічається на практиці. Для нього щільність розподілу ймовірностей задається формулою $f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2p}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$, де a-математичне сподівання, s - середнє квадратичне відхилення величини x, e – основа натурального логарифму, p - відношення довжини кола до діаметру. Щільність і функцію розподілу нормального розподілу з параметрами a и s будемо позначати відповідно $f_{N(a,s)}(x)$ і $F_{N(a,s)}(x)$.

Крива розподілу для нормального закону називається *нормальною кривою*. Її можна побудувати, дослідивши функцію $f(x)$ рис 3.2.

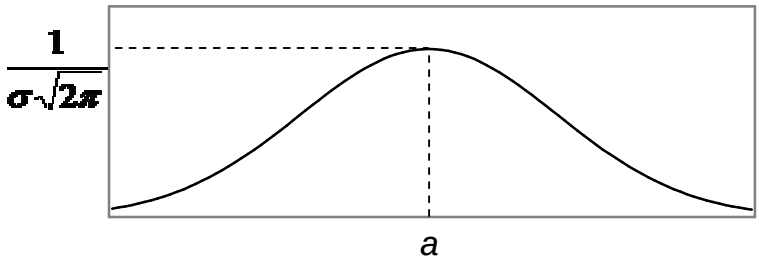


Рис. 3.2.

Графік щільності нормального розподілу з параметрами a и s при різних s показаний на Рис. 3.3. З ростом s максимальна ордината нормальної кривої спадає, а сама крива стає більш пологою , тобто притискується до осі *OX*; при зменшенні s нормальна крива стає більш "гостровершинною " і витягується в додатному напрямку осі *OY*.

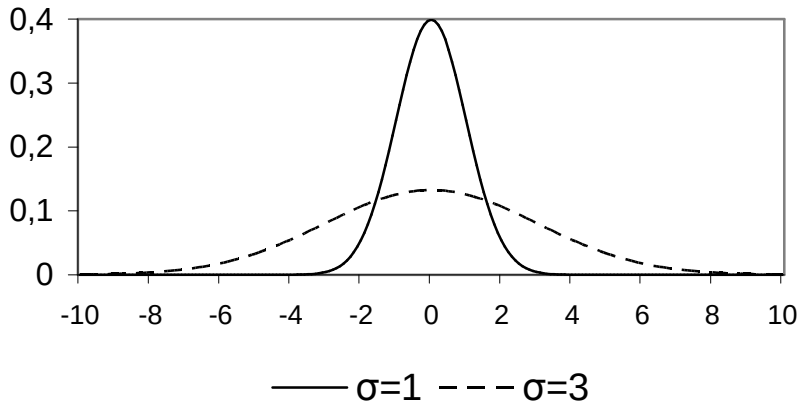


Рис. 3.3.

Нормованим називають нормальний розподіл з параметрами a=0, s =1,

$$f_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}e^{-\frac{x^2}{2}};\ F_{N(0,1)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt. \qquad (3.1)$$

Неважко перевірити , що $F_{N(a,s)}(x)=F_{N(0,1)}(\frac{x-a}{s})$. Функцію $F_{N(0,1)}(x)$ називають стандартною функцію нормального розподілу (іноді інтегралом ймовірностей). Окрім функції $F_{N(0,1)}(x)$ в обчисленнях часто використовується функція Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Відзначимо наступні властивості функції Лапласа:

а) $\Phi(0)=0$;

б) $\Phi(+\infty)=0{,}5$;

в) $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.

г) $F_{N(0,1)}(x)=0{,}5+\Phi(x)$.

д) $\Phi(x)\approx 0{,}5$, при x>4.

Таблиці функції Лапласа або $F_{N(0,1)}(x)$ є практично у всіх підручниках по теорії ймовірностей.

Використовуючи формулу (3.1) та властивість г), можна одержати формулу для обчислення ймовірності попадання значень випадкової величини x, розподіленої за нормальним законом с параметрами a і s, в інтервал $[c;d]$:

$P\{c < x < d\} = \Phi(\frac{d-a}{s}) - \Phi(\frac{c-a}{s}) = F_{N(0,1)}(\frac{d-a}{s}) - F_{N(0,1)}(\frac{c-a}{s})$. Зокрема

$P(|x-a| < e) = 2\Phi(\frac{e}{s})$.

Нормальний розподіл дуже часто використовується, щоб описати випадкові явища. Багато випадкових величин, що спостерігаються у реальних стохастичних експериментах, мають нормальний розподіл або розподіл близький до нього. Цей факт пояснюється одним з найважливіших теоретичних результатів теорії ймовірностей – центральною граничною теоремою (ЦГТ), згідно з якою сума значної кількості незалежних випадкових величин, кожна з яких дає малий внесок в загальну суму, наближено розподілена по нормальному закону. Більш точно ЦГТ буде сформульована далі.

До числа випадкових величин, що описуються нормальним розподілом, належать, перш за все, помилки, що виникають при вимірювані тих чи інших фізичних об'єктів: помилки зважування, антропологічних вимірів, визначення міцності нитки, стійкість до стирання тощо. Для спеціалістів дуже важлива можливість опису відхилень розмірів від номінальних за допомогою нормального закону. На цьому базується багато методів статистичного контролю якості виробів. Крім того, при масовому виробництві велику роль відіграє можливість наближення розподілу розмірних ознак за допомогою нормального закону. На цьому факті засновані розрахунки розмірного асортименту взуття та одягу. У статистиці нормальним законом користуються також як стандартом, відносно якого оцінюється поведінка реальних даних.

Приклади розрахунків, що пов'язані з нормальним розподілом.

Приклад 1. Знайти ймовірність попадання значень нормальної випадкової величини x з параметрами $a = 5$ і $s = 6$ в інтервал [-1; 2]

Розв'язання. $P\{-1 \le x \le 2\} = \Phi(\frac{2-5}{6}) - \Phi(\frac{-1-5}{6}) = \Phi(-0{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(1) - \Phi(0{,}5) =$ $0{,}3413 - 0{,}1915 = 0{,}1498 \approx 0{,}1$ (значення функції Лапласа $\Phi(x)$ беруться із таблиці).

Приклад 2. Розрахунок помилки оцінки діаметру нитки.

Визначається діаметр деякої нитки без систематичних помилок. Випадкові помилки підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $s = 0{,}05$ мм. Знайти ймовірність того. що діаметр нитки при

тестуванні буде визначений з точністю 0,01мм, тобто помилка не перевищить 0,01мм.

Розв'язання. Відсутність систематичних помилок зумовлює рівність середнього значення результатів вимірювань та істинного значення діаметра нитки, тобто середнє значення помилки дорівнює нулю. Позначивши x помилку визначення діаметру та припустивши нормальність розподілу цієї випадкової величини. маємо $x \in N(0, s)$. Оцінюємо,

$P(|x| < 0{,}01) = P(|x| < \frac{s}{5}) = 2\Phi(\frac{s}{5s}) = 2\Phi(0{,}2) \approx 2 \cdot 0{,}08 = 0{,}16$, знайшовши значення $\Phi(0{,}2) \approx 0{,}08$ в таблиці значень функції Лапласа.

Приклад 3. Правило "$2s$". Для будь якої випадкової величини. $x \in N(a, s)$ маємо $P(a - 2s < x < a + 2s) = P(|x - a| < 2s \approx 0{,}95$

Доведення.

$$P(|x - a| < 2s = P(a - 2s < x < a + 2s) = \Phi(\frac{a + 2s - a}{s}) - \Phi(\frac{a - 2s - a}{s}) =$$

$$\Phi(\frac{2s}{s}) - \Phi(\frac{-2s}{s}) = 2\Phi(2) \approx 2 * 0{,}477 \approx 0{,}95.$$

Аналогічно доводиться правило "$3s$": для будь якої випадкової величини. $x \in N(a, s)$ маємо $P(a - 3s < x < a + 3s) = P(|x - a| < 3s) \approx 0{,}99$.

Відповідні правила кажуть про те, що ймовірність попадання випадкової величини за межі "$2s$" інтервалу $(a - 2s, a + 2s)$, а тим більше "$3s$" для будь якого нормального закону розподілу дуже близько до 0.

Приклад 4. Розрахунок довжин льняних волокон в кіпі за допомогою нормального розподілу

Нехай треба розрахувати розмір льняних волокон в кіпі за умови, що довжина волокна описується нормальним законом з параметрами: середнє значення a = 27.4, середнє квадратичне відхилення $s = 6.95$.

Розрахувати розмірн льняних волокон – це означає визначити який відсоток в кіпі волокон з розміром 10-14мм, 14-18мм, 18-22мм, 22-26мм, 26-30мм, 30-34мм, 34-38мм, 38-42мм та 42-46мм.

Таким чином, для визначення для підрахунку відсотку волокна довжиною від 10 до 14 мм необхідно знайти число $P\{10 \le x < 14\} \cdot 100\%$, що і дасть потрібний результат.

$$P\{10 \le x < 14\} = \Phi\left(\frac{14 - 27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 27.4}{6.95}\right) = \Phi(-1.928) - \Phi(-2.504) =$$

$$\Phi(2.504) - \Phi(1.928) = 0.027 - 0.006 \approx 0.021$$

$$P\{14 \le x < 18\} = \Phi\left(\frac{18 - 27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{14 - 27.4}{6.95}\right) = 0.088 - 0.027 \approx 0.061$$

$$P\{18 \le x < 22\} = \Phi\left(\frac{22 - 27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{18 - 27.4}{6.95}\right) = 0.219 - 0.088 \approx 0.130$$

$$P\{22 \le x < 26\} = \Phi\left(\frac{26-27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{22-27.4}{6.95}\right) = 0.420 - 0.219 \approx 0.202$$

$$P\{26 \le x < 30\} = \Phi\left(\frac{30-27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{26-27.4}{6.95}\right) = 0.646 - 0.420 \approx 0.226$$

$$P\{30 \le x < 34\} = \Phi\left(\frac{34-27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{30-27.4}{6.95}\right) = 0.829 - 0.646 \approx 0.183$$

$$P\{34 \le x < 38\} = \Phi\left(\frac{38-27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{34-27.4}{6.95}\right) = 0.936 - 0.929 \approx 0.108$$

$$P\{38 \le x < 42\} = \Phi\left(\frac{42-27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{38-27.4}{6.95}\right) = 0.982 - 0.936 \approx 0.046$$

$$P\{42 \le x < 46\} = \Phi\left(\frac{46-27.4}{6.95}\right) - \Phi\left(\frac{42-27.4}{6.95}\right) = 0.996 - 0.982 \approx 0.014$$

Результати обчислень занесемо в таблицю.

Довжина волокна	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42	42-46
Відсоток в кіпі	2.1	6.1	13.0	20.2	22.6	18.3	10.8	4.6	1,4

Звертаємо увагу, що сума усіх відсотків близька до 100%.

В наступній таблиці наведено результати 105 вимірів довжин льняного волокна в кіпі.

Довжина волокна	10-14	14-18	18-22	22-26	26-30	30-34	34-38	38-42	42-46
Відсоток в кіпі	3.8	2.9	19.0	20.0	23.8	14.3	8.6	5.7	1,9

Для порівняння отриманих результатів наведемо графіки (рис.3,4) відсотків довжин льняного волокна в кіпі отриманих теоретичними розрахунками та вимірів.

Рис. 3.4

Граничні теореми теорії ймовірностей.

Граничні теореми теорії ймовірностей – загальна назва класу теорем, що вказують умови виникнення деяких закономірностей як результату дії великої кількості випадкових факторів.

Найбільше поширення мають два типи граничних теорем: закон великих чисел (ЗВЧ) та центральна гранична теорема (ЦГТ), кожен з яких може бути сформульований у різних модифікаціях. Наведені нижче варіанти теорем повинні надати уяву про суть відповідних тверджень.

Закон великих чисел (ЗВЧ).

Теорема 1 (ЗВЧ у формі Чебишева).

Нехай x_1, x_2,... x_n,... послідовність попарно незалежних випадкових величин, що мають обмежену дисперсію. Тоді для будь якого додатного числа e виконується $P\left\{\left|\frac{x_1+...+x_n}{n}-\frac{a_1+...+a_n}{n}\right|>e\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, де a_1, a_2, ..., a_n – математичні сподівання випадкових величин x_1, x_2,... x_n відповідно.

Теорема 2 (ЗВЧ для незалежних однаково розподілених випадкових величин).

Нехай x_1, x_2, ... x_n, ... послідовність попарно незалежних однаково розподілених випадкових величин, що мають скінченну дисперсію. Тоді для будь якого додатного числа e виконується $P\left\{\left|\frac{x_1+...+x_n}{n}-a\right|>e\right\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, де a - математичне сподівання випадкових величин.

Теорема 2 добре ілюструє суть закону великих чисел: при великій кількості випробувань середнє арифметичне випадкових величин прямує до конкретного числа.

Центральна гранична теорема.

Термін „центральна гранична теорема” у теорії ймовірностей означає будь яке твердження про те, що при виконанні деяких умов функція розподілу суми індивідуально малих незалежних випадкових величин прямують до функції розподілу нормально розподіленої випадкової величини $F_{N(0,1)}(x)$, якщо кількість доданків необмежено зростає. Важливість таких тверджень полягає в тому. що вони дають теоретичне обґрунтування експериментального факту: якщо внаслідок експерименту, де спостерігається випадкова величина x визначається великою кількістю випадкових факторів і вплив кожного з них на значення x дуже малий, то розподіл x добре наближається нормальним розподілом з відповідними математичним сподіванням та дисперсією.

Теорема 3 (ЦГТ для незалежних однаково розподілених випадкових величин).

Нехай x_1, x_2,... x_n, ... послідовність взаємно незалежних однаково розподілених випадкових величин, що мають обмежені дисперсії s^2 та математичне сподівання a. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} P(t_1 < \dfrac{x_1+...+x_n-an}{s\sqrt{n}} < t_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}}\int\limits_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Слід звернути увагу, що за умовою теореми дисперсія будь якого доданку x_k дуже мала у порівнянні з дисперсією всієї суми $x_1+...+x_n$, тобто $\dfrac{D(x_1+...+x_n)}{D(x_k)} = \dfrac{s^2}{ns^2} = \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ми не будемо наводити інших формулювань ЦГТ, відіславши читача до відповідної літератури, але акцентуємо увагу на тому, що всі вони дають умови, коли сума великої кількості випадкових величин наближається нормальним розподілом.

Центральна гранична теорема як теоретичне обґрунтування використання нормального розподілу при дослідженні антропологічних ознак.

Візьмемо конкретну ознаку, наприклад, обхват грудей. Можна уявити, що період зростання індивіда розбитий на маленьких часових проміжках, в кожному з яких індивід зростає на якусь випадкову величину x_k, яка пов’язана із спадковістю, харчуванням, стресами і т.д. Припустимо, що зростання на кожному з цих проміжків не залежить від його збільшення на інших інтервалах. Зрозуміло, що якщо інтервали дуже маленькі, то дисперсія випадкової величини x_k, що оцінює зростання на k-му інтервалі, маленька у порівнянні з дисперсією всієї суми $h = x_1 + x_2 + ... + x_n$, тому, внаслідок ЦГТ, можна вважати, що відповідна ознака, принаймні у першому наближенні, має нормальний розподіл.

4. Основні поняття математичної статистики

Аналіз результатів будь-якого дослідження стає більш переконливим і наочним, якщо він відповідним чином оброблений. Розробка методів реєстрації, опису й аналізу результатів досліджень складає зміст спеціальної науки - математичної статистики. Основною передумовою існуючих методів обробки результатів є представлення останніх як набору значень деяких випадкових величин. Вказані випадкові величини, за умовою, приймають значення у деякій множині *X*, яка, взагалі кажучи, може мати довільну природу (ця природа визначається конкретним змістом даних, що аналізуються). Найчастіше *X* являє собою певну множину дійсних чисел або векторів. Досить вживаною назвою множини *X* є генеральна сукупність.

Статистичні сукупності. Ознаки і варіанти

Математична статистика є наука про закономірності й методи вивчення масових явищ, що представляються у вигляді сукупностей однорідних об'єктів, званих статистичними або випадковими сукупностями.

Статистичною сукупністю або просто вибіркою ми будемо називати набір значень випадкової величини, що отримана в серії незалежних стохастичних експериментів.

Будь-які виробничі процеси, зокрема, процеси прядіння, ткацтва або швейного виробництва (а також вихідні матеріали у вигляді сировини чи напівфабрикатів і готова продукція), являють собою масові явища. Кожне з цих масових явищ може бути представлено у формі тих чи інших статистичних сукупностей однорідних об'єктів. Наведемо приклади таких сукупностей: волокна бавовни у кипі; зразки рівниці або пряжі, що виробляються даною машиною; добова продукція прядильної, ткацької або швейної фабрики; деталі того чи іншого швейного виробу (наприклад, спинки піджаків); населення того чи іншого віку і статі деякого району і т. д.

Кожна статистична сукупність об'єктів володіє різними *ознаками*, по відношенню до яких можна вивчати цю сукупність.

Ознакою статистичної сукупності об'єктів називається та чи інша властивість, що характеризує елементи (члени) цієї сукупності.

Так, ознаками статистичної сукупності волокон бавовни в кипі є: довжина волокна, його товщина, міцність, зрілість і т. д. Ознаки зразків пряжі - це міцність, вага, товщина і т. д., а добової продукції фабрики - вага пряжі, кількість метрів тканини, кількість пальто, вартість продукції, відсоток браку і т. д. Продовжуючи перерахування згаданих вище сукупностей, можна сказати, що для статистичної сукупності спинок піджаків подібними ознаками будуть ті чи інші їхні розміри (довжина, ширина та ін.) Нарешті, ознаками статистичної сукупності населення деякого району є антропометричні ознаки зріст, вага, обхват грудей і т. д.

Ознаки можуть бути кількісними, тобто піддаються вимірюванню (наприклад, довжина волокна, зріст людини), і якісними, коли можна фіксувати лише наявність або відсутність деякого якості (є шлюб чи ні, стать людини та ін.).

Кількісні ознаки будемо позначати великими літерами латинського алфавіту *X, Y, W, ...* , якісні - прописними літерами, з яких починаються назви якостей (*Ф* - фарбований, *Б* - бракований і т. п.), а якісну ознаку, протилежну даній, позначають тієї ж літерою, але з рискою над нею: $\overline{Ф}$ - нефарбований, $\overline{Б}$ - не бракований і т. п.

Кількісна ознака може приймати різні числові значення, тобто може варіюватися. *Варіантами* називаються числові значення ознаки в статистичній сукупності. Позначають варіанти малими літерами з індексами.

Кількісні ознаки можуть описувати дискретні та недискретні випадкові величини. Наприклад, довжина волокна і зростання людини є неперервними ознаками, а число обривів нитки на годину і кількість пальто, що випускаються на добу - дискретними.

Кожній статистичної сукупності об'єктів відповідає декілька статистичних сукупностей варіантів, в залежності від числа ознак, по відношенню до яких вивчається дана статистична сукупність об'єктів.

Приклад. Статистична сукупність об'єктів - снувальні вали. Виміривши масу намотування, отримаємо статистичну сукупність варіантів за ознакою «маса», припустимо 154 , 170, 168, 171, 162, 179, 165 кг, ... Виміривши діаметр намотки, отримаємо статистичну сукупність варіантів за ознакою «діаметр намотки» (наприклад, 81 , 87, 86, 89, 83, 91, 85 см ,...).

Статистична сукупність варіантів є одним з основних об'єктів вивчення математичної статистики, подібно до того як число є основним поняттям арифметики, а функція - основним поняттям математичного аналізу.

Надалі статистичні сукупності варіантів ми будемо називати просто сукупностями або вибірками.

Основний метод, який використовується в математичній статистиці

Основним в математичній статистиці є вибірковий метод. Суть його в тому, що та чи інша статистична сукупність, відповідна всьому масовому явищу (наприклад, вся продукція), вивчається не шляхом вимірювання (випробування) всіх її членів за деякими ознаками, а шляхом вимірювання лише якоїсь її частини, інакше вибіркової сукупності , або *вибірки*. Вся ж сукупність (дивись дане вище визначення) називається - *генеральною сукупністю*.

Вивчаючи розподіл варіантів в вибіркової сукупності, ми, використовуючи методи математичної статистики, зможемо зробити висновок про розподіл ознаки і в генеральній сукупності. Вибіркові сукупності відрізняються від генеральних насамперед кількістю членів.

Об'ємом статистичної сукупності називається загальне число її членів.

Об’єм N генеральної сукупності часто можна вважати нескінченним (число волокон в кипі, число зразків пряжі, що виробляється даної машиною, і т. д.). Об’єм n вибірки завжди обмежений і, як правило, невеликий. Очевидно, чим більший об'єм вибірки, тим точніше вона відбиває розподіл ознаки в генеральній сукупності. Але при великих вибірках для відповідних розрахунків потрібно багато часу і праці; крім того, при випробуваннях продукт іноді

пошкоджується (наприклад, при випробуванні тканини на міцність). Тому виникає найважливіший для практики питання: який найменший об'єм вибірки, при якому отримані результати обробки, можна перенести і на генеральну сукупність.

Результати обробки вибіркової сукупності називають *вибірковими*, або *емпіричними*, тобто отриманими з досліду.

На відміну від них результати обробки генеральної сукупності називають генеральними, або теоретичними.

5. Моделювання детермінованих результатів експерименту

Не рідкою є ситуація, коли вибіркові дані являють собою пару дійсних чисел (x_i, y_i), i = 1, 2, …n, причому є підстави вважати, що змінна y, представлена тут значеннями y_1, y_2, …, y_n, є деякою функцією від змінної x, що представлена значеннями x_1, x_2, …, x_n. Якщо явний вигляд функції невідомий, то його намагаються підібрати, використовуючи ті чи інші еврістичні прийоми. Математична обробка результатів спостережень, в данный роботі, не ставить перед собою завдання розгадати істинний характер залежності між наявними змінними. Мова йде про те, щоб описати зазначені залежності простою формулою, яка б надавала можливість виконувати інтеполяцію [21].

Підбор функції за експериментальними даними називають підбором емпіричних формул. Підбор емпіричних формул складається з двох етапів:

1. З'ясування загального вигляду формули (вибір вигляду функції із деякої відомої множини);

2. Визначення найкращих її параметрів.

З'ясування загального вигляду формули.

Нехай відомо, що досліджувані функції вибираються із наступної множини:

(1) $y = ax + b$,

(2) $y = ab^x$,

(3) $y = 1/(ax + b)$,

(4) $y = a\ln(x) + b$,

(5) $y = ax^b$,

(6) $y = a + b/x$,

(7) $y = x/(ax + b)$.

Для визначення загального вигляду формули за експериментальними даними на координатній площині будується найбільш правдоподібна, так звана, згладжувальна крива. Для визначення конкретного вигляду залежності на заданому відрізку зміни незалежної змінної вибираємо на графіку дві, досить надійні, і, по можливості, далеко віддалені одна від другої точки. Наприклад, нехай це точки (x_1, y_1) і (x_n, y_n). Обчислюємо

$x_{ар} = (x_1+x_n)/2$, $x_{геом} = \sqrt{x_1 \cdot x_n}$, $x_{гарм} = 2 \cdot x_1 \cdot x_n / (x_1+x_n)$,

$y_{ар} = (y_1+y_2)/2$, $y_{геом} = \sqrt{y_1 \cdot y_n}$, $y_{гарм} = 2 \cdot y_1 \cdot y_n / (y_1+y_n)$.

З графіка функції знайдемо

$f_1 = f(x_{ар})$, $f_2 = f(x_{геом})$, $f_3 = f(x_{гарм})$.

Обчислимо $e_1 = \left| f_1 - y_{ар} \right|$, $e_2 = \left| f_1 - y_{геом} \right|$, $e_3 = \left| f_1 - y_{гарм} \right|$, $e_4 = \left| f_2 - y_{ар} \right|$, $e_5 = \left| f_2 - y_{геом} \right|$, $e_6 = \left| f_3 - y_{ар} \right|$, $e_7 = \left| f_3 - y_{гарм} \right|$.

Мінімальному значенню ε_i відповідає ***i-й*** вигляд аналітичної залежності $y = f_{емп}(x, a, b)$: **(1)** $y = ax + b$**, (2)** $y = ab^x$**, (3)** $y = 1/(ax + b)$**, (4)** $y = a\ln(x) + b$**, (5)** $y = ax^b$**, (6)** $y = a + b/x$**, (7)** $y = x/(ax + b)$.

Визначення найкращих параметрів емпіричної формули.

Визначення найкращих параметрів емпіричної формули виконується *методом найменших квадратів*.

Відповідно до методу найменших квадратів найкращими параметрами емпіричної формули, в якій загальна кількість невідомих параметрів дорівнює 2, вважаються ті, для яких сума квадратів відхилень емпіричних та обчислених значень при одному і тому самому значенні аргументу буде мінімальною

$$s(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - y_{емп}(x_i, a, b) \right)^2 \to \min_{a,b} \qquad (5.1)$$

де a, b – невідомі параметри, x_i – перша координата пари вибіркових значень, y_i – друга координата зазначеної пари, $y_{емп}(x_i, a, b)$ – значення підібраної функції в точці x_i. Звичайно, це значення залежить від параметрів a, b і не може бути обчислене доти, доки не буде розв'язано оптимізаційну задачу (5.1).

Узявши часткові похідні s за невідомими параметрами a і b, одержуємо так звану *нормальну систему* для визначення коефіцієнтів a і b $\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial b} = 0, \end{cases}$ розв'язок якої, як правило, досить складний.

Якщо емпірична функція $y = f_{емп}(x, a, b)$ лінійна, нормальна система є системою двох лінійних рівнянь з невідомими a, b: $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i . \end{cases}$

Лінеаризація функцій(тобто перетворення, які дозволяють перейти до дослідження лінійної функції).

1. $\underline{y = ab^x}$, $\ln(y) = \ln(a) + x\cdot\ln(b)$, $Y = Ax + B$, де $Y_i = \ln(y_i)$, $A = \ln(b)$, $B = \ln(a)$. Визначивши A і B, знайдемо $a = e^B$, $b = e^A$.
2. $\underline{y = 1/(ax + b)}$, $1/y = ax + b$, $Y = ax + b$, де $Y_i = 1/y_i$.
3. $\underline{y = a\ln(x) + b}$, $Y = aX + b$, де $Y_i = y_i$, $X_i = \ln(x_i)$.
4. $\underline{y = ax^b}$, $\ln(y) = \ln(a) + b\ln(x)$, $Y = Ax + B$, де $Y_i = \ln(y_i)$, $X_i = \ln(x_i)$, $A = b$,
5. $B = \ln(a)$. Визначивши A і B, знайдемо $a = e^B$, $b = A$.
6. $\underline{y = a + b/x}$, $Y = AX + b$, де $Y_i = y_i$, $X_i = 1/x_i$ $A = b$, $B = a$. Визначивши A і B, знайдемо $a = B$, $b = A$.

7. $y = x/(ax + b)$, $1/y = a + b/x$, $Y = AX + B$, де $Y_i = 1/x_i$, $X_i = 1/x_i$, $A = b$, $B = a$. Визначивши A і B, знайдемо $a = B$, $b = A$.

Приклад.

Знайти функціональну залежність $y=f(x,a,b)$ із класу функцій

(1) $y = ax + b$,

(2) $y = ab^x$,

(3) $y = 1/(ax + b)$,

(4) $y = a\ln(x) + b$,

(5) $y = ax^b$,

(6) $y = a + b/x$,

(7) $y = x/(ax + b)$.

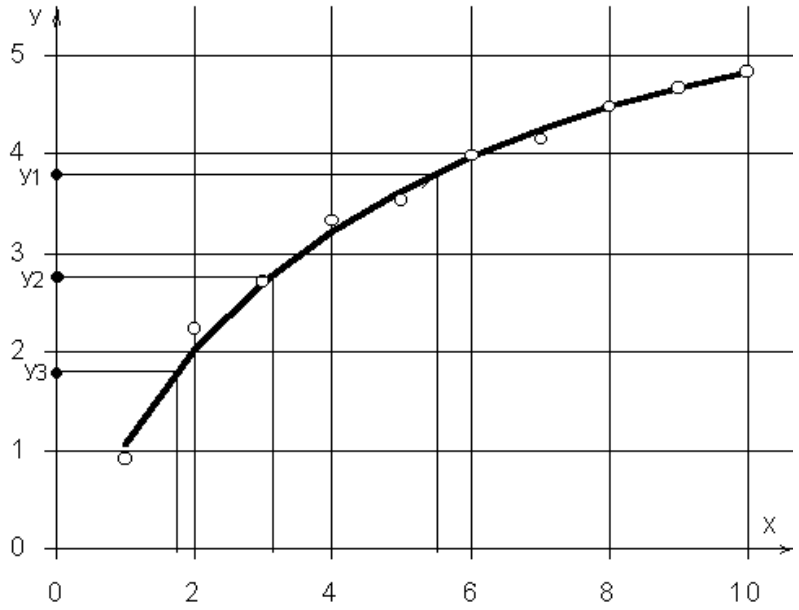
та підібрати *оптимальні параметри по наступним даним*

x_i	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	8,00	9,00	10,00
y_i	0,91	2,22	2,71	3,31	3,52	3,97	4,15	4,48	4,65	4,82

Розв'язок

Визначення вигляду залежності (емпіричної формули)

а). Побудова графіка залежності $y = f(x)$.



b). Вибираємо точки $(x_1; y_1)$ і $(x_{10}; y_{10})$, для яких $x_1 = 1{,}00$, $y_1 = 0{,}91$, $x_{10} = 10{,}00$, $y_{10} = 4{,}82$. Обчислюємо:

$$x_{ар} = \frac{x_1 + x_{10}}{2} = \frac{1{,}00 + 10{,}00}{2} = 5{,}5$$

$$x_{геом} = \sqrt{x_1 \cdot x_{10}} = \sqrt{1 \cdot 10} = 3{,}16$$

$$x_{гарм} = \frac{2x_1 \cdot x_{10}}{x_1 \cdot x_{10}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 10}{1{,}00 + 10{,}00} = 1{,}81$$

$$y_{ар} = \frac{y_1 + y_{10}}{2} = \frac{0{,}91 + 4{,}82}{2} = 2{,}87$$

$$y_{\text{геом}} = \sqrt{y_1 \cdot y_{10}} = \sqrt{0{,}91 \cdot 4{,}82} = 2{,}09$$

$$y_{\text{гарм}} = \frac{2y_1 \cdot y_{10}}{y_1 \cdot y_{10}} = \frac{2 \cdot 0{,}91 \cdot 4{,}82}{0{,}91 + 4{,}82} = 1{,}53$$

с). Із графіка функції $y = \overline{f}(x)$ находимо

$$\overline{y}_1^* = \overline{f}(x_{\text{ар}}) = \overline{f}(5{,}5) = 3{,}75$$

$$\overline{y}_2^* = \overline{f}(x_{\text{геом}}) = \overline{f}(3{,}16) = 2{,}77$$

$$\overline{y}_3^* = \overline{f}(x_{\text{гарм}}) = \overline{f}(1{,}81) = 1{,}9$$

$$\varepsilon_1 = \left|\overline{y}_1^* - y_{\text{ар}}\right| = |3{,}75 - 2{,}87| = 0{,}88$$

$$\varepsilon_2 = \left|\overline{y}_1^* - y_{\text{геом}}\right| = |3{,}75 - 2{,}09| = 1{,}66$$

$$\varepsilon_3 = \left|\overline{y}_1^* - y_{\text{гарм}}\right| = |3{,}75 - 1{,}53| = 2{,}22$$

$$\varepsilon_4 = \left|\overline{y}_2^* - y_{\text{ар}}\right| = |2{,}77 - 2{,}87| = 0{,}10$$

$$\varepsilon_5 = \left|\overline{y}_2^* - y_{\text{геом}}\right| = |2{,}77 - 2{,}09| = 0{,}66$$

$$\varepsilon_6 = \left|\overline{y}_3^* - y_{\text{ар}}\right| = |1{,}9 - 2{,}87| = 0{,}97$$

$$\varepsilon_7 = \left|\overline{y}_3^* - y_{\text{геом}}\right| = |1{,}9 - 1{,}53| = 0{,}37$$

Так як $e_4 = 0{,}1$ – мінімальне, то вибираємо залежність $y = a\ln(x) + b$. Зробимо заміну змінної $x_i = \ln(x_i)$, тоді $Y = aX + b$, де $Y_i = y_i$, $X_i = \ln(x_i)$.

Визначення найкращих параметрів емпіричної формули.

Для визначення a і b методом найменших квадратів необхідно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{10} X_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{10} X_i = \sum\limits_{i=1}^{10} X_i Y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{10} X_i + 10b = \sum\limits_{i=1}^{10} Y_i. \end{cases}$

Всі необхідні обчислення подані у наступній таблиці:

№	x_i	$Y_i = y_i$	$X_i = \ln(x_i)$	X_i^2	$X_i Y_i$	$\overline{y}_i$	$\varepsilon_i = (y_i - \overline{y}_i)^2$
1	1,00	0,91	0,000	0,000	0,000	0,94	0,0009
2	2,00	2,22	0,693	0,480	1,538	2,10	0,0144
3	3,00	2,71	1,099	1,207	2,978	2,78	0,0049
4	4,00	3,33	1,386	1,922	4,615	3,27	0,0036
5	5,00	3,52	1,609	2,590	5,664	3,64	0,0144
6	6,00	3,97	1,792	3,210	7,114	3,95	0,0004
7	7,00	4,15	1,946	3,787	8,076	4,21	0,0036
8	8,00	4,48	2,079	4,324	9,314	4,43	0,0025
9	9,00	4,65	2,197	4,828	10,216	4,63	0,0004

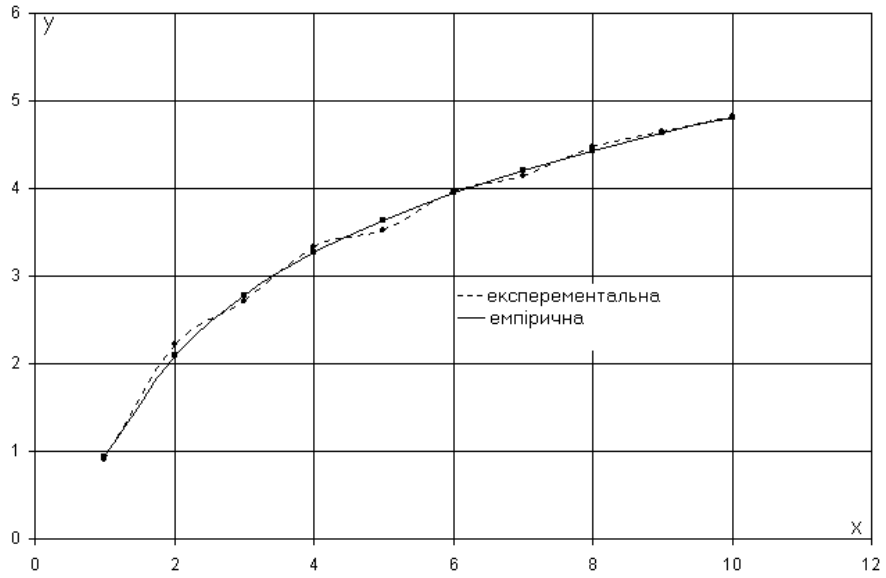
10	10,00	4,82	2,303	5,302	11,100	4,81	0,0001
Σ		34,76	15,104	27,65	60,615		0,0452

Тоді $\begin{cases} 27{,}65a + 15{,}10b = 60{,}62 \\ 15{,}10a + 10b = 34{,}76 \end{cases}$

Розв'язавши нормальну систему рівнянь, отримаємо a = 1,68; b = 0,94. Шукана емпірична залежність $\bar{y} = 1{,}68\ln x + 0{,}94$. Похибка апроксимації

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}\left(y_i - \bar{y}_i\right)^2}{10}} = 0{,}0672$$

Будуємо графіки функцій: $y_{\text{експ}} = f(x)$; $y_{\text{емп}} = f(x, a, b)$ ($\bar{y} = 1{,}68\ln x + 0{,}94$).



6. Обробка незалежних результатів стохастичних ксперименті в

Вибірка. Статистичний ряд. "Стеблина з листям"

Визначення. Вибіркою об'єму n будемо називати набір x_1, x_2, …, x_n значень випадкової величини x, які отримані при проведенні n незалежних експериментів.

Відзначимо, що якщо експерименти відбулися, то вибірка – це набір конкретних чисел. При цьому в багатьох випадках, наприклад, якщо експерименти тільки повинні відбутися, під вибіркою розуміють набір незалежних випадкових величин, кожна з яких має розподіл досліджуваної випадкової величини x.

Розглянемо вибірку, отриману при дослідженні міцності нитки пряжі, записану таблицею:

37	13	25	48	1	36	1	22	31	49	61	48
11	23	34	58	25	48	12	24	36	57	31	57

Така форма запису дає мало інформації про особливості вибірки.

Зобразимо вибірку у вигляді так званої таблиці частот, яку інколи називають статистичним рядом.

Таблиця 6.1

Таблиця частот

1	11	12	13	22	23	24	25	31	34	36	37	48	49	57	58	61
2	1	1	1	1	1	1	2	2	1	2	1	3	1	2	1	1

У верхньому рядку таблиці записані вибіркові дані, які йдуть по зростанню, у нижньому – частоти, з якими вони зустрічаються у вибірці. Такий запис більш компактний та наочний, хоча багато особливостей і при такому зображенні вибірки залишаються непомітними.

В таблиці 6.2 вибірку зображено ще у одному вигляді, який називається “стеблиною з листям” [14]. Ліворуч від вертикальної риси записана кількість десятків (“стеблина”), праворуч – одиниці наших чисел (“листя”). Зірочка означає, що до кількості десятків дописується по одній цифрі, які йдуть за вертикальною лінією. З табл. 6.2 видно, що дана вибірка є групою чисел, яка має майже симетричний характер, з концентрацією в середині вибірки та спаданням на кінцях.

Таблиця 6.2

“Стеблина з листям”

0^*	1	1				
1^*	1	2	3			
2^*	2	3	4	5	5	
3^*	1	2	4	6	6	7
4^*	8	8	8	9		
5^*	7	7	8			
6^*	1					

Доповнимо “стеблину з листям” двома стовпчиками, в першому з яких запишемо кількість елементів у відповідному рядку, а у другому – загальну кількість елементів у цьому та попередніх рядках. Тоді “стеблина з листям” нашої вибірки набуває вигляду:

0^*	1	1					2	2
1^*	1	2	3				3	5
2^*	2	3	4	5	5		5	10
3^*	1	2	4	6	6	7	6	16
4^*	8	8	8	9			4	20
5^*	7	7	8				3	23
6^*	1						1	24

“Стеблина з листям” стає у нагоді при дослідженні вибірок середнього об’єму (50-200 елементів). При цьому способі запису наочно простежуються такі особливості:

- розділяється вибірка на підгрупи чи являє собою одну групу чисел;
- чи симетричне спадання до кінців усередині підгруп;

- чи є більш-менш популярні області або розташування даних можна вважати більш-менш рівномірним;
- чи великий розкид даних та ін.

Ранжування вибірки. Ранг вибіркових елементів

Процес впорядкування вибірки називається *ранжуванням.* Найчастіше вибірку впорядковують за зростанням, тобто таким чином, що кожний наступний елемент є не меншим за попередній. Номер елементу x у впорядкованій вибірці називають *рангом* елементу x і позначають $r(x)$.

При подальших міркуваннях, якщо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – загальна вибірка, то впорядкована вибірка позначається $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)}$.

Нехай t – деяке число; $[t]$ – ціла частина числа t; $\{t\}$ – дробова частина числа t. Визначимо елемент дробового рангу t за формулою: $x_{(t)}=x_{([t])}+\{t\}(x_{([t+1])}- x_{([t])})$ [15].

Наприклад, елемент $x_{(6,3)}$ вибірки (табл. 6.2) дорівнює: $x_{(6,3)}=x_{(6)}+0,3(x_{(7)}- x_{(6)})=22+0,3(23-22)=22,3$.

Медіаною вибірки об'єму n будемо називати вибірковий елемент, ранг якого дорівнює $\frac{n+1}{2}$. Медіана позначається med або $medx$. За визначенням $medx = x_{(\frac{n+1}{2})}$.

Наприклад, медіана вибірки (табл.6.1) дорівнює:

$$med = x_{(\frac{24+1}{2})} = x_{(12,5)} = x_{(12)} + 0,5(x_{(13)} - x_{(12)}) = 31 + 0,5(34 - 31) = 32,5$$

Нижнім квартилем вибірки називається вибірковий елемент C_1, ранг якого розраховується за формулою: $r(C_1) = \frac{r(med) + 0,5}{2} = \frac{n}{4} + \frac{1}{2}$.

Верхнім квартилем вибірки називається вибірковий елемент C_2, ранг якого розраховується за формулою: $r(C_2) = n + 1 - r(C_1)$.

Квартилі разом із медіаною ділять впорядковану вибірку на чотири приблизно одинакові за об'ємом частини.

Знайдемо квартилі розглядуваної вибірки (табл. 6.2):

$$r(C_1) = \frac{r(med) + 0,5}{2} = \frac{12,5 + 0,5}{2} = 6,5;$$

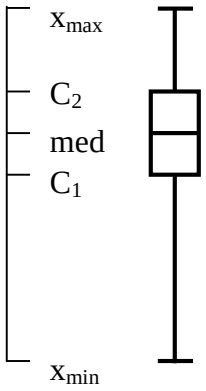
$$C_1 = x_{(6,5)} = x_{(6)} + 0,5(x_{(7)} - x_{(6)}) = 22 + 0,5(23 - 22) = 22,5;$$

$$r(C_2) = n + 1 - r(C_1) = 24 + 1 - 6,5 = 18,5;$$

$$C_2 = x_{(18,5)} = x_{(18)} + 0,5(x_{(19)} - x_{(18)}) = 48 + 0,5(48 - 48) = 48.$$

"Ящик з вусами"

"Ящик з вусами" – це ще одна з форм (графічна) зображення вибіркових даних. Побудова "ящика з вусами" стане зрозумілою з наступного рисунку, де: $x_{min}=min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}= x_1$; $x_{max}=\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}= x_n$. По малюнку добре орієнтуватися, розглядаючи вибірку на симетричність.



Групування вибірки. Полігон і гістограма

Для полегшення аналізу вибірок великого об'єму використовується так зване *групування* вибірки з наступною побудовою полігонів і гістограм.

Процедура групування полягає в заміні індивідуальних вибіркових значень x_1, x_2, …, x_n деякою сукупністю числових інтервалів (інтервалів групування) $[a_1, a_2]$, $[a_2, a_3]$, …, $[a_k, a_{k+1}]$, k>1 та вказівкою, скільки вибіркових значень належить кожному з цих інтервалів. При цьому об'єднання всіх зазначених інтервалів повинно містити в собі всі вибіркові значення x_1, x_2, …, x_n.

Сукупність інтервалів групування і відповідних кількостей вибіркових значень називається *згрупованою вибіркою*.

Частіше за все використовують інтервали групування однакової ширини. Існують різні методики їх побудови [14-17]. В даній роботі для групування вибірки пропонується наступна послідовність дій.

1) Визначається наближена кількість інтервалів групування $\tilde{k}$ за формулою:

$$\tilde{k} = \begin{cases} 5, & якщо\ [4\lg(n)+1] < 5 \\ [4\lg(n)+1], & якщо\ 5 \le [4\lg(n)+1] \le 30, \\ 30 & якщо\ [4\lg(n)+1] > 30 \end{cases} \qquad (6.1)$$

де n – об'єм вибірки; $[4\lg(n)+1]$ - ціла частина числа $4\lg(n)+1$.

2) Визначається довжина інтервалу групування h за правилом:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\tilde{k}}, \qquad (6.2)$$

де x_{max}, x_{min} – відповідно максимальне та мінімальне вибіркові значення.

Відзначимо, що для спрощення побудови число h як правило округлюють.

3) Визначаються числа a_1, a_2, ..., a_{k+1} (і тим самим – інтервали групування) за формулою: $a_{i+1} = a_i + h$, де i змінюється від 1 до k, а число k визначається з нерівності: $a_k < x_{\max} \le a_{k+1}$. Числа a_i, a_{i+1} називаються нижньою та верхньою границями і-го інтервалу групування. За нижню границю першого

інтервалу групування a_1 можна взяти довільне число, але так, щоб в інтервалі $[a_1,\ a_2]$ містилося принаймні одне вибіркове значення. Визначимо a_1 наприклад наступним чином:

$$a_1 = x_{\min} - \frac{1}{2}\min_i (x_{i+1} - x_i). \qquad (6.3)$$

Абсолютною частотою і-го інтервалу групування називається кількість вибіркових елементів у даному інтервалі (позначається f_i).

Зауваження. Кінець *i*-го і початок (*i*+1)-го інтервалів групування збігаються. Якщо вибіркові значення потрапляють на цей "стик", то в літературі можна зустріти різні рекомендації для цього випадку. В даній роботі, згідно з [14], пропонується наступне правило. Половину із них належить віднести до *i*-го інтервалу, а іншу половину – до (*i*+1)-го, тобто абсолютна частота *i*-го інтервалу може бути дробовим числом.

Гістограмою (від грецького "гістос" - стовп) абсолютних частот називається фігура, утворена із прямокутників, побудованих на інтервалах групування як на основах, а висота кожного прямокутника дорівнює абсолютній частоті відповідного інтервалу групування.

Полігоном (від грецьких "полі" – багато, "гон" - кут) абсолютних частот називається ламана, утворена послідовним сполученням на площині точок з координатами $(\bar{x}_i, f_i)$, де $\bar{x}_i$ - середина *i*-го інтервалу групування, тобто $\bar{x}_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$, f_i - абсолютна частота *i*-го інтервалу групування.

Розглянемо побудову гістограми та полігону абсолютних частот на прикладі вибірки, поданої в вигляді таблиці 6.1. У цій вибірці 24 елементи, тому $\tilde{k} = [4\lg(n)+1] = [4\lg(24)+1] = [4\cdot 1{,}38+1] = [6{,}52] = 6$;

$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\tilde{k}} = \frac{61-1}{6} = 10$.

Знайдемо границі інтервалів. За формулою (6.3) маємо:

$a_1 = x_{\min} - \frac{1}{2}\min_i (x_{i+1} - x_i) = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 = 0{,}5$; далі отримаємо: $a_2 = a_1 + h = 0{,}5 + 10 = 10{,}5$; $a_3 = a_2 + h = 10{,}5 + 10 = 20{,}5$; і т.д.

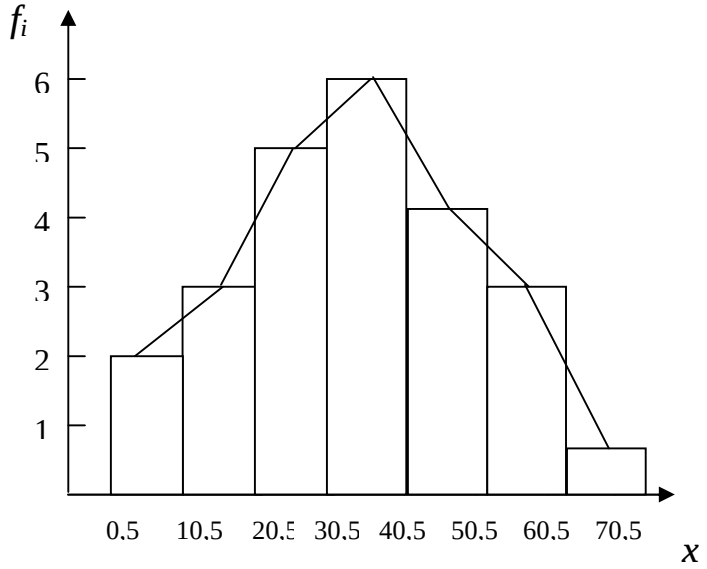
Для побудови полігонів та гістограм зручно попередньо заповнити таблицю "групування - частоти". Так для нашого прикладу відповідна таблиця має вигляд:

Таблиця 6.3

Таблиця "групування - частоти"

№	границі інтервалів		середні точки	абсолютні частоти
i	a_i	a_{i+1}	$\bar{x}_i$	f_i
1	0,5	10,5	5,5	2
2	10,5	20,5	15,5	3
3	20,5	30,5	25,5	5
4	30,5	40,5	35,5	6

5	40,5	50,5	45,5	4
6	50,5	60,5	55,5	3
7	60,5	70,5	65,5	1



Гістограма та полігон абсолютних частот даної вибірки.

За побудованою гістограмою (полігоном) можна зробити наступні висновки:

а) вибіркові значення лежать в інтервалі від 0,5 до 70,5;

б) найбільш часто зустрічаються значення, що належать інтервалу від 30,5 до 40,5; найбільш рідко – в інтервалі від 60,5 до 70,5;

в) проглядається певна симетричність відносно центральних інтервалів.

Відзначимо, що при аналізі вибірок різного об'єму доцільно використовувати і інші види частот. Наприклад, відносні частоти $f_i' = \frac{f_i}{n}$ (при аналізі вибірок різного об'єму); приведені частоти $f_i'' = \frac{f_i}{h}$ (при застосуванні групування з різною шириною інтервалів групування).

Вибіркові аналоги функції та щільності розподілу

Нехай вибірка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - це незалежні спостереження за випадковою величиною x з функцією розподілу $F(x)$ (теоретичною функцією розподілу).

Нагадаємо, що функцією розподілу випадкової величини x називається функція $F(x)$, $x \in (-\infty; +\infty)$, яка визначається рівністю: $F(x) = P(x<x)$. Якщо функція розподілу може бути представлена в вигляді: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ де $f(x)$ – деяка невід'ємна функція, то випадкова величина x називається абсолютно неперервною, а для функції $f(x)$ використовується назва щільності розподілу.

Наше завдання полягає в тому, щоб оцінити невідомі функції $F(x)$ та $f(x)$, тобто за вибіркою побудувати деякі функції, які будуть наближувати $F(x)$ та $f(x)$ при великих об'ємах n вибірки. Такими функціями є емпірична функція розподілу $F_n(x)$, кумулятивна функція розподілу $F_n^*(x)$ та гістограма щільностей f_n^*(x).

Емпірична функція розподілу $F_n(x)$

Емпіричною функцією розподілу $F_n(x)$ називається функція, яка задається формулою $F_n(x) = \frac{K_n(x)}{n}$, де $K_n(x)$ – число таких вибіркових значень x_i, що $x_i<x$, де n – об'єм вибірки.

Представимо вибірку у вигляді таблиці частот:

$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	…	$x_{(m)}$
n_1	n_2	…	n_m

де $x_{(1)} <x_{(2)} <\ldots<x_{(m)}$; n_i – кількість повторень елемента $x_{(i)}$ в вибірці; $n_1 +n_2 +\ldots+n_m= n$. Тоді побудова графіка функції $F_n(x)$ стає зрозумілою з рисунку 6.1.

Для будь-якого фіксованого x функція $F_n(x)$ за ймовірністю прямує до $F(x)$, тобто функція $F_n(x)$ буде оцінкою теоретичної функції розподілу $F(x)$.

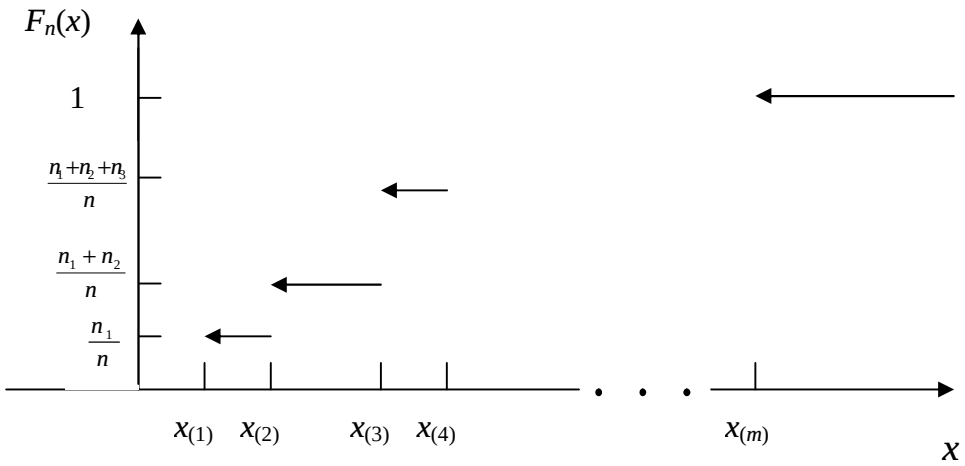


Рис. 6.1

Попередня оцінка $F_n(x)$ функції $F(x)$ будувалась за не згрупованою вибіркою. Розглянемо ще одну оцінку для $F(x)$.

Кумулятивна функція розподілу $F_n^*(x)$

Для згрупованої вибірки за оцінку функції розподілу $F(x)$ часто вибирають так звану кумулятивну функцію розподілу $F_n^*(x)$, або скорочено - кумуляту (від латинського "кумуляція" - накопичення).

Нехай наша вибірка згрупована. Для побудови кумулятивної функції розподілу $F_n^*(x)$ спочатку необхідно знайти абсолютні F_i і відносні F_i' кумулятивні частоти. Ці частоти визначаються за формулами:

$$F_i = \begin{cases} 0 & i = 0 \\ F_{i-1} + f_i & i = 1,2,...,k \end{cases}$$

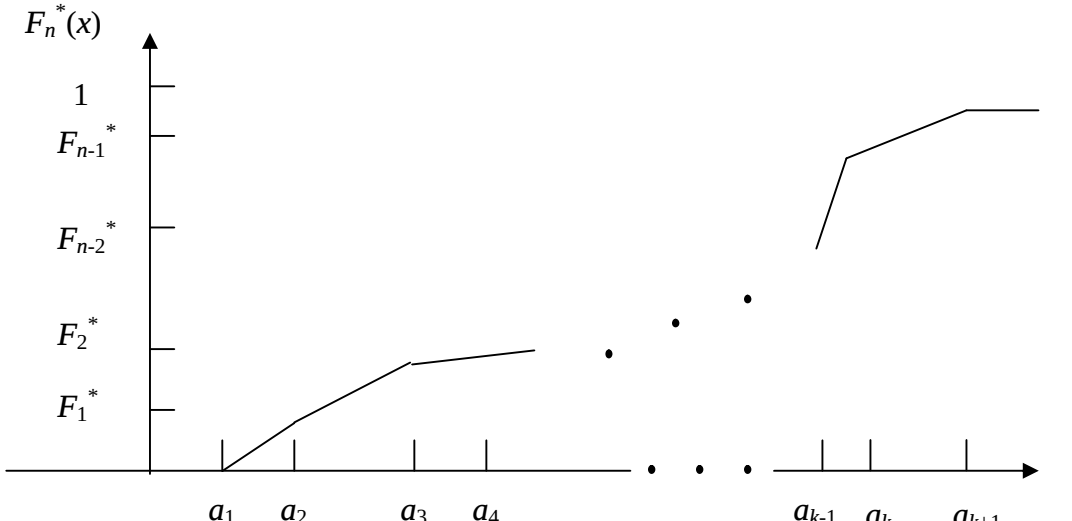
$$F_i' = \frac{F_i}{n},\ i=1, 2, ..., k,$$

де f_i – абсолютна частота i-го інтервалу групування $[a_i,\ a_{i+1}]$; k – число інтервалів групування. Тоді за визначенням:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le a_1 \\ F_{i-1}' + \dfrac{x - a_i}{a_{i+1} - a_i}(F_i' - F_{i-1}') & x \in (a_i, a_{i+1}),\ i = 1,2,...,k \\ 1 & x > a_{k+1} \end{cases}$$

$a_1,\ a_2,\ ...,\ a_{k+1}$ – границі інтервалів групування.

Іншими словами, для $a_1 < x < a_{k+1}$ $F_n^*(x)$ одержуємо, з'єднуючи відрізками



ис.6.2

прямих точки площини з координатами $(a_{i+1},\ F_i')$, i = 0, 1, 2,…, k. Графік кумулятивної функції розподілу наведено на рис. 6.2.

Поряд з кумулятивною функцією $F_n^*(x)$ розглядають кумулятивну функцію абсолютних частот, яку можна одержати із рис. 6.2, замінивши відносні кумулятивні частоти F_i' на абсолютні кумулятивні частоти F_i та проградуювавши вісь *Oy* не від 0 до 1, а від 0 до n.

Гістограма щільностей $f_n^*(x)$

Поряд з абсолютними і відносними частотами розглядаються так звані вибіркові щільності, які визначаються наступним чином: $f_i^*(x) = \dfrac{f_i}{n \cdot h}$, де f_i – абсолютна частота i-го інтервалу; n – об'єм вибірки; h – довжина інтервалів групування.

Аналітично гістограма щільностей $f_i^*(x)$ задається наступною формулою:

$$f_i^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le a_1 \\ f_i^* & x \in (a_i, a_{i+1}),\ i = 1,2,...,k \\ 0 & x > a_{k+1} \end{cases}$$

Гістограма щільностей $f_i^*(x)$ є оцінкою невідомої теоретичної щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини x.

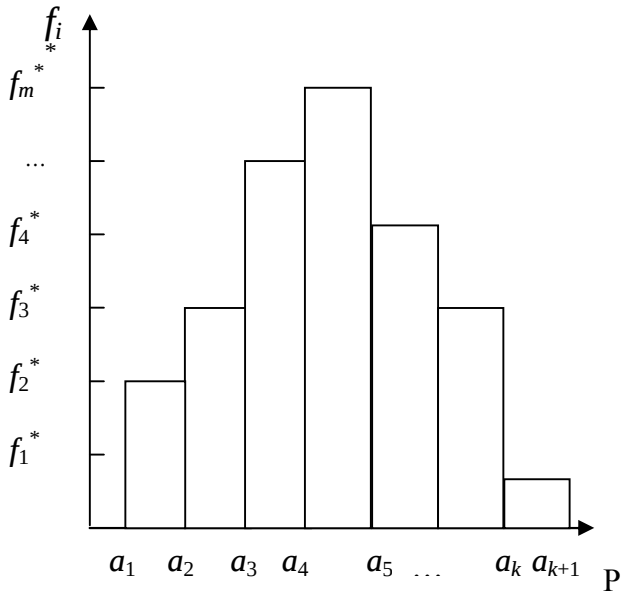


Рис.6.3

Неважко переконатися, що для $x \neq a_i$, $i=1,2,\ldots,k$: $\dfrac{dF_n^*(x)}{dx} = f_n^*(x)$, а також $F_n^*(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_n(y)dy$. Звідси та з попередніх викладок маємо наступні рівності: $P(a \le x < b) \approx F_n^*(b) - F_n^*(a) = \int\limits_a^b f_n^*(x)dx$, які дозволяють для великих n наближено знаходити ймовірність попадання випадкової величини x в довільний інтервал (a, b).

Точкові статистичні оцінки основних числових параметрів випадкової величини

При дослідженні випадкових величин часто виникає потреба охарактеризувати випадкову величину за допомогою декількох чисел. Найбільш важливими є числа, що задають:

- центр, навколо якого розсіюються значення випадкової величини;
- відхилення (середнє) випадкової величини від центру розсіювання.

За центр випадкової величини x, який є характеристикою її розміщення, найчастіше приймають одне з наступних чисел:

- математичне сподівання випадкової величини Mx;
- медіану випадкової величини $med\ x$;
- моду випадкової величини $mod\ x$.

Нагадаємо, що математичне сподівання випадкової величини x - це число, яке обчислюється за однією з формул:

а) $Mx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ - для абсолютно неперервних випадкових величин із щільністю розподілу $f(x)$.

б) $Mx = \sum_i x_i p_i$ - для дискретних випадкових величин, які приймають значення x_i з ймовірністю p_i (i=1, 2, ...).

Медіаною (*med x*) неперервної випадкової величини x будемо називати найменше з чисел x, для яких $P(x<x)=0{,}5$. Це означає, що число *med x* ділить числову вісь на інтервали, в які випадкова величина x попадає з однаковою ймовірністю 0,5.

Під *модою* випадкової величини x будемо розуміти число *mod x*, яке є:

- точкою максимуму щільності розподілу, якщо x - абсолютно неперервна випадкова величина;

- значенням, яке випадкова величина x приймає з найбільшою ймовірністю, якщо x - дискретна випадкова величина.

Зрозуміло, що випадкова величина x може мати декілька мод і що числа Mx, *med x* та *mod x* не обов'язково рівні між собою, але якщо вони співпадають, то будемо казати, що випадкова величина має симетричний відносно центру (або просто симетричний) розподіл.

Основними параметрами, які характеризують міру відхилення випадкової величини x від центру, є дисперсія Dx та середнє квадратичне відхилення sx. Нагадаємо, що $Dx=M(x-\text{M}\,\xi)^2$, а $\sigma\xi=\sqrt{Dx}$.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - вибірка, отримана при дослідженні випадкової величини x, основні числові параметри якої відомі. Потрібно по результатам наших спостережень, тобто по вибірці $x_1, x_2, \ldots, x_n$, знайти числа, які б були наближеннями невідомих параметрів досліджуваної випадкової величини.

Під точковою *статистичною оцінкою* невідомого числового параметра q будемо розуміти функцію $q_n^* = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вибіркових значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка дає наближення значення параметра q, тобто $q \sim g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (надалі слово "точкова" часто буде опускатися). Таким чином, для знаходження оцінки числового параметра потрібно підібрати функцію $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яку називають *статистикою*, значення якої на конкретній вибірці давало б наближення невідомого числового параметра.

Оскільки до початку експериментів вибіркові можуть вважатися випадковими величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то функцію $q_n^* = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можна розглядати як деяку випадкову величину q_n^*.

Зрозуміло, що для кожного числового параметру треба підібрати свою статистику, більше того, для оцінки одного і того ж параметру можна підібрати різні статистичні оцінки.

Критерії якості точкових статистичних оцінок

Статистична оцінка q_n^* параметру q називається *незсуненою*, якщо $M(q_n^*) = q$. З двох статистичних незсунених оцінок параметру q *ефективнішою* називається та, дисперсія якої менше.

Статистична оцінка q_n^* параметру q називається обґрунтованою, якщо при $n \to \infty$ оцінка q_n^* прямує до числа q за ймовірністю, тобто $q_n^* \xrightarrow{P} q$ при $n \to \infty$.

Нагадаємо, що послідовність випадкових величин $x_1, x_2, \mathbf{K}$ збігається до випадкової величини x за ймовірністю, якщо для довільного додатного числа e виконується: $P\{\,|x_n - x| > e\,\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Існує багато методів знаходження точкових статистичних оцінок. Серед таких методів одними з найбільш відомих і ефективних є метод максимальної правдоподібності (або максимуму правдоподібності) та метод підстановки емпіричного розподілу. Останній полягає в наступному. Нехай відомо, яким чином виражається шуканий параметр через теоретичну функцію розподілу F_ξ спостережуваної величини ξ. Наприклад, $q=g(F_\xi)$, де $g(F_\xi)$ – якийсь вираз, що містить F_ξ. Тоді в якості оцінки q^* параметру q береться величина $g(F^*_\xi)$, де F^*_ξ – оцінка F_ξ за вибіркою. Наприклад, це може бути визначена вище емпірична функція розподілу або камулята. Не завжди різні методи дають одні і ті ж рекомендації щодо оцінювання одного і того ж параметру. Втім, обидва названі вище методи призводять до однакової оцінки таких параметрів як математичне сподівання і дисперсія у випадку нормальності теоретичного розподілу. Нижче наводяться конкретні інструкції відносно оцінювання цих та деяких інших параметрів теоретичного розподілу.

Обчислення статистичних оцінок основних числових параметрів випадкової величини

1) Оцінка математичного сподівання

Для не згрупованої вибірки вибірковим середнім називають статистику $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Для згрупованої вибірки вибірковим середнім називають статистику $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{x}_i$ (тут $\bar{x}_i$ - середні точки інтервалів групування; f_i - абсолютні частоти цих інтервалів).

Вибіркове середнє використовується як оцінка теоретичного математичного сподівання $M\xi$ принаймі для не згрупованої вибірки. Величина $\bar{x}$ є незсуненою обґрунтованою оцінкою $M\xi$.

2) Оцінка дисперсії та середнього квадратичного відхилення

Для не згрупованої вибірки: - вибірковою дисперсією називають статистику $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}((\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - n\bar{x}^2)$;

- другим вибірковим центральним моментом називають статистику $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2) = \frac{n-1}{n}S^2$

Для згрупованої вибірки: - вибірковою дисперсією називають статистику $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} f_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$;

- другим вибірковим центральним моментом називають статистику

$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i(\bar{x}_i - \bar{x})^2$ де f_i - абсолютна частота, $\bar{x}_i$ - середина *i*-го інтервалу групування;

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням називається статистика $S = \sqrt{S^2}$. Статистики S та $\sqrt{m_2}$ є статистичними оцінками середнього квадратичного відхилення s_x випадкової величини *x*.

3) Оцінка медіани

Для не згрупованої вибірки для оцінки *med x* розглядається елемент рангу $\frac{n+1}{2}$, який називається вибірковою медіаною і позначається *med* або *med x*.

В згрупованій вибірці для знаходження оцінки медіани необхідно знайти абсцису точки перетину прямої y = 0,5 та графіка функції кумулятивних відносних частот. На рисунку 6.5 зображено знаходження медіани для згрупованої вибірки.

4) Оцінка моди

Для не згрупованої вибірки за оцінки моди *mod x* приймається вибірковий елемент, що має найбільшу частоту і позначається *mod*.

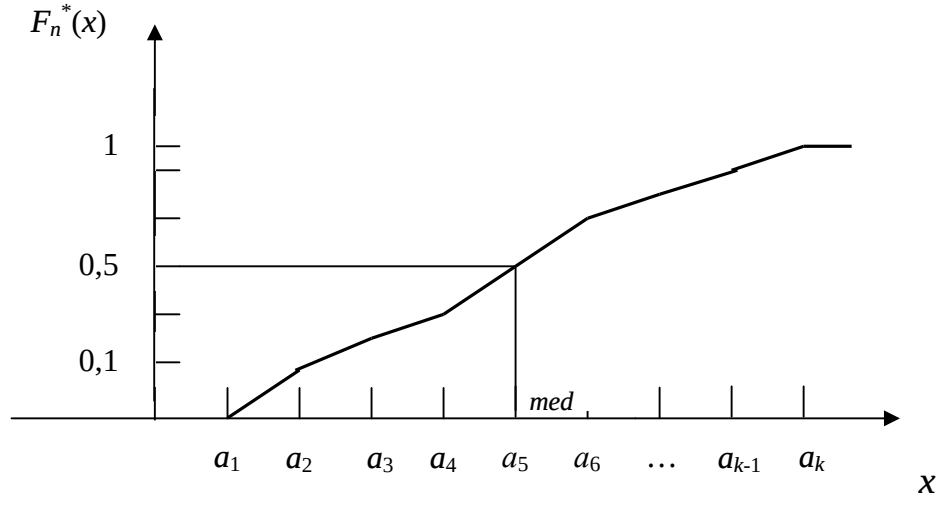


Рис. 6.5

Для згрупованої вибірки для обчислення моди використовується формула $\text{mod} = a_m + \frac{d \cdot h}{d + d'}$, де m – номер модального інтервалу групування (тобто того, який містить максимальну кількість вибіркових значень);

$h = a_{m+1} - a_m$; $d = |f_m - f_{m-1}|$; $d' = |f_{m+1} - f_m|$.

Зміст формули зрозуміло з рисунку 6.6.

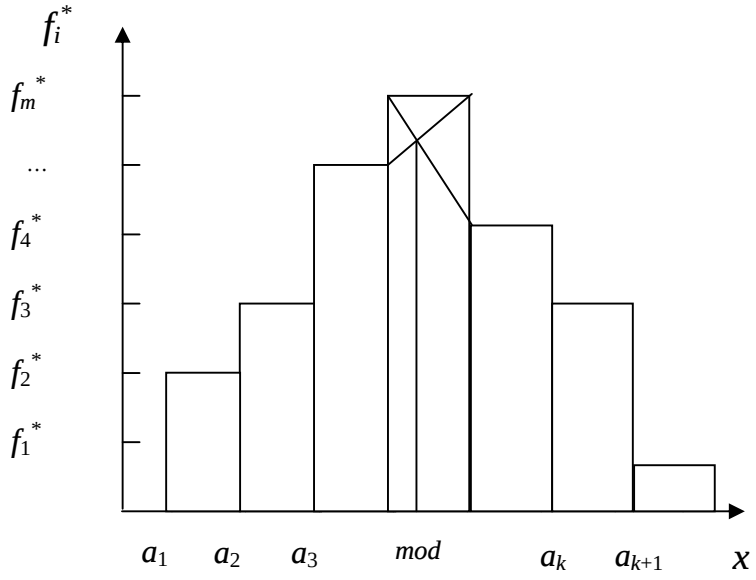


Рис. 6.6

Зауважимо, що якщо $f_{m-1}= f_m= f_{m+1}$, то права частина формули, що служить визначенням моди, не визначена. В цьому випадку покладають: $mod = \bar{x}_m = \frac{a_{m+1} + a_m}{2}$.

Якщо m=1 або m=k, то у першому випадку покладають f_{m-1}=0, а в другому f_{m+1}=0.

Статистичні оцінки показників симетричності розподілу

Якщо випадкова величина x має симетричний розподіл, то слід сподіватися, що вибірка, отримана при дослідженні x, також симетрична, тобто "симетрично" розсіяна навколо деякого центру. Ознакою симетричності вибірки є так зване *емпіричне правило Юла*: симетрична вибірка повинна мати одну моду, яка може бути обчислена за формулою: $mod \approx 3(med - \frac{2}{3}\bar{x})$ [15].

Для конкретності наближену рівність розуміємо так: вибіркова мода відрізняється від моди, отриманої за формулою Юла, не більше, ніж на 10% від середнього квадратичного відхилення.

Статистичні оцінки квантилів

Квантилем рівня a ($0 < a < 1$) у випадку неперервних розподілів називається число U_a, яке є найменшим розв'язком рівняння $F(x) = a$, де $F(x)$ – функція розподілу досліджуваної випадкової величини.

Геометрично це означає, що квантиль рівня a - це найменша з абсцис точок перетину прямої $y=a$ з графіком функції $y = F(x)$ (рис. 6.7).

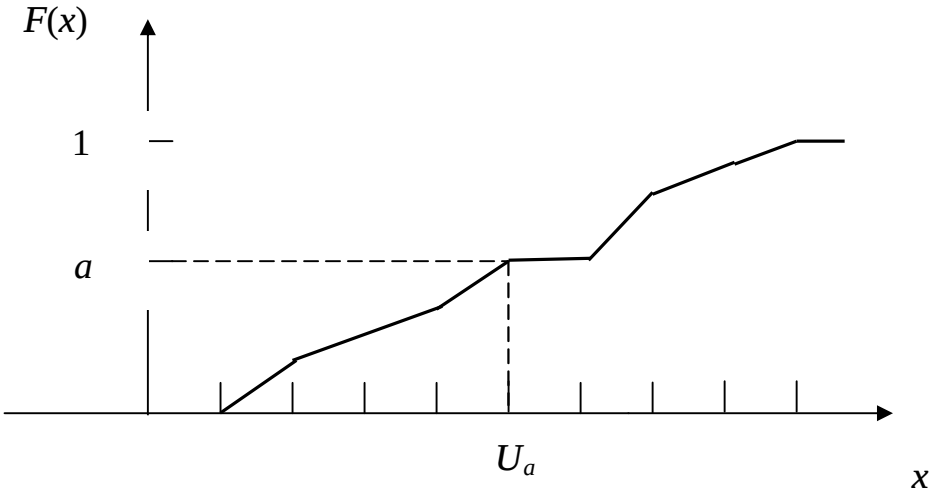


Рис. 6.7

Зауваження. При означенні квантиля рівня a слова “найменший розв’язок” необхідно для усунення неоднозначності, яка може виникати при розв’язанні рівняння $F(x) = a$. Так, наприклад, графіки функцій $=a$ та $y= F(x)$ можуть мати нескінченну множину спільних точок (тобто рівняння $y= F(x)$ має нескінченну кількість розв’язків), в той час як квантиль рівня α визначається однозначно.

Процентилем рівня α ($0 < a < 100$) називається число Q_a, яке зв’язано з квантилем співвідношенням: $Q_a= U_{(a/100)}$

Так, наприклад, $Q_{30}= U_{0,3}$; $Q_{50}= U_{0,5}$.

Вибірковий квантиль рівня α - це число $\hat{U}_a$, яке має ту властивість, що приблизно a-частина вибіркових даних менше за число $\hat{U}_a$. Аналогічну властивість має вибірковий процентиль $\hat{Q}_a$: менше за $\hat{Q}_a$ приблизно a% вибірки. Визначення вибіркового квантиля (процентиля) пов’язане з тією властивістю теоретичного квантиля, що для неперервної випадкової величини x квантиль рівня a задовольняє умові: $P(x<U_a) = a$, тобто ймовірність того, що випадкова величина x під час експерименту прийме значення менше за число U_a, дорівнює a. (Наприклад, якщо $U_{0,3}=-7$, то $P(x<-7) = 0,3$.)

Вибіркові квантилі (процентилі) $\hat{U}_\alpha$ ($\hat{Q}_a$) є наближенням для теоретичних квантилів U_a (процентилів Q_a).

Знаходження вибіркових квантилів (процентилів)

1. Знаходження вибіркових квантилів за не згрупованою вибіркою

Для знаходження вибіркового квантиля (процентиля) рівня α треба спочатку знайти ранг цього квантиля (процентиля). В літературі можна знайти різні вирази з цього приводу. В даній роботі рекомендуються наступні

формули: $r(U_a) = a \cdot n + 0{,}5$ (для квантилів), $r(Q_a) = \frac{a \cdot n}{100} + 0{,}5$ (для процентилів), де n – об'єм вибірки. Наприклад, якщо α=0,3, n=80, то маємо: $r(U_{0,3}) = 0{,}3 \cdot 80 + 0{,}5 = 24{,}5$. Якщо ранг вибіркового елемента відомий, то легко знайти відповідний вибірковий елемент.

- за згрупованою вибіркою

Будемо знаходити вибіркові квантилі (процентилі) графічним способом. Для цього використаємо графік кумулятивної функції розподілу відносних частот. На рівні, що відповідає заданому числу a, проведемо пряму $y=a$ до перетину з кумулятою. Найменша з абсцис точок перетину графіків – шуканий квантиль (див. рис. 6.7).

Зауваження. При проведенні прямої $y=a$ необхідно узгодити рівень a з одиницями, в яких проградуйована вісь Oy. Якщо вісь Oy проградуйована в процентах, то a - рівень квантиля – необхідно помножити на 100, а рівень процентиля залишити без змін.

Інтервальні оцінки параметрів нормально розподіленої випадкової величини

У попередніх параграфах вивчалися точкові оцінки невідомих числових параметрів випадкової величини, тобто оцінки, що задавалися одним числом. Якщо оцінка q^* наближувала параметр q, то виникало питання, наскільки точне це наближення, тобто яке відхилення q^* від q. Додатне число d, для якого виконується рівність $|q^* - q| < \delta$ характеризує точність оцінки q^* для параметру q. Чим менше число d, тим краще оцінка q^* наближує q. Величину d називають довірчою помилкою, або помилкою репрезентативності (відтворення генерального параметра вибірковим).

Але q^* - випадкова величина, та й параметр q невідомий. Тому про нерівність $|q^* - q| < d$ (або її еквівалент $q^* - d < q < q^* + d$) можна говорити лише з деякою ймовірністю. Треба навчитися будувати інтервали, які "накриють" шукані параметри з потрібною ймовірністю.

Визначення. Довірчим інтервалом рівня a ($0 < a < 1$) для невідомого параметру q називають числовий інтервал $[x_1, x_2]$, який накриває невідомий параметр q з ймовірністю $(1-a)$, тобто $P\{ q \in [x_1, x_2] \} = 1-a$.

Число $(1-a)$ називають *надійністю*, або *довірчою ймовірністю* відповідного інтервалу, а число a - *рівнем значущості*.

При побудові довірчих інтервалів число a задається заздалегідь. Найчастіше за a береться одне з чисел a=0,1 або a=0,05 або a=0,01. Тоді відповідні надійності: 0,9 або 0,95 або 0,99. Відзначимо, що інтервальні оцінки невідомих параметрів задаються двома числами x_1, x_2 - початком і кінцем інтервалу, якому повинен належати невідомий параметр з відповідною ймовірністю.

Визначення. Нехай x_1, x_2, ... , x_n – незалежні випадкові величини, кожна з яких має розподіл $N(0;1)$. Тоді, випадкова величина $x = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$ має розподіл c^2 з n ступенями волі (позначення $x \sim c_n^2$).

Визначення. Нехай x_1 та x_2 - незалежні випадкові величини, причому $x_1 \sim N(0;1)$, а $x_2 \sim c_n^2$. Тоді, випадкова величина $h = \frac{x_1}{\sqrt{\frac{x_2}{n}}}$ має розподіл Стьюдента з n ступенями волі (позначення $h \sim t_n$).

Побудова довірчих інтервалів для невідомих математичного сподівання та дисперсії нормально розподіленої випадкової величини базується на наступній теоремі:

якщо x_1, x_2, …, x_n - вибірка, отримана при дослідженні випадкової величини $x \sim N(\mu; \sigma)$, то:

1) статистики $\bar{x}$ та S^2 - незалежні

(нагадаємо, що $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$; $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$);

2) $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{s^2} \sim c^2_{n-1}$;

3) $\sqrt{n}\frac{\bar{x} - m}{S} \sim t_{n-1}$.

За допомогою цієї теореми легко довести, що за умови вивчення випадкової величини $x \sim N(\mu; \sigma)$:

а) довірчим інтервалом рівня α для математичного сподівання μ є інтервал

$$A = \left[\bar{x} - U^t_{1-\frac{a}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x} + U^t_{1-\frac{a}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \right],$$ де $U^t_{1-\frac{a}{2}}$ - квантиль рівня $1-\frac{a}{2}$ розподілу Стьюдента з n-1 ступенями волі;

б) довірчим інтервалом рівня a для дисперсії σ^2 є інтервал

$$B = \left[\frac{(n-1)S^2}{U^c_{1-\frac{a}{2}}}; \frac{(n-1)S^2}{U^c_{\frac{a}{2}}} \right],$$ де $U^c_{1-\frac{a}{2}}$ - квантиль рівня $1-\frac{a}{2}$ розподілу c^2 з n-1 ступенями волі.

Перевірка статистичних гіпотез

Загальна схема перевірки гіпотез

До проблеми перевірки статистичних гіпотез ми неминуче приходимо в таких часто виникаючих задачах, як порівняльна оцінка різних технологічних процесів за їх продуктивністю та економічністю або порівняння конструктивних особливостей машин, приладів і т.п. Аналогічні задачі

характерні для багатьох областей науки та техніки. І хоч критерії перевірки гіпотез досить різноманітні, їх об'єднує загальна логічна схема:

1. Формулюється нульова H_0 і альтернативна H_1 гіпотези.
2. Вибирається так званий рівень значущості a.
3. Вибирається відповідна гіпотезі статистика критерію T_n.
4. Знаходиться розподіл статистики T_n при гіпотезі H_0.
5. Визначається критична область Y_1 та допустима область Y_0.
6. За вибіркою $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обчислюється експериментальне значення статистики T_n.
7. Приймається рішення про гіпотезу H_0. Якщо експериментальне значення статистики T_n потрапляє в критичну область, то гіпотезу H_0 відкидаємо; в противному випадку говоримо, що вибірка не дає підстави відкинути гіпотезу.

Дамо необхідні пояснення до цієї схеми.

Під *статистичними гіпотезами* розуміють різного роду припущення про закони теоретичного розподілу або їхні параметри.

Нульовою (основною) гіпотезою називають висунуту гіпотезу і позначають її символом H_0. Конкуруючою (альтернативною) гіпотезою називають будь яке припущення, що суперечить H_0 (гіпотеза H_1).

Статистикою критерію $T_n = T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають функцію вибіркових значень, яка використовується для перевірки гіпотез. Статистика T_n є випадковою величиною, розподіл якої вважається відомим за умови, що нульова гіпотеза H_0 справедлива.

Основна ідея перевірки статистичних гіпотез

Множину Y всіх значень, які може приймати випадкова величина T_n, розіб'ємо на дві підмножини, що не перетинаються Y_0 та Y_1 ($Y = Y_0 \cup Y_1$) так, щоб ймовірність попадання значення статистики T_n у множину Y_1 за умови справедливості гіпотези H_0 була достатньо малою. Якщо виявилося, що $T_n(x) = T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Y_1$, то в припущенні справедливості гіпотези H_0 трапилась малоймовірна подія, і ця гіпотеза повинна бути відкинутою як така, що протирічить статистичним даним. У протилежному випадку (тобто якщо $T_n(x) \in Y_0$) немає причин не прийняти гіпотезу H_0, і слід вважати, що спостереження не виявляють протиріч з H_0.

Найчастіше ймовірність попадання у множину Y_1 вибирається рівною або не вищою ніж 0,01 або 0,05 або 0,1. Таку ймовірність називають рівнем значущості (a); множину Y_1 – критичною областю; Y_0 – областю прийняття гіпотези, а правило перевірки – критерієм згоди.

Якщо T_n – неперервна випадкова величина, то критична область Y_1 задовольняє рівності: $P\{ T_n \in Y_1 \mid H_0\} = a$ де вираз у лівій частині позначає ймовірність прийняття статистикою T_n значення у множині Y_1 за умови справедливості гіпотези H_0. Зауважимо, що на практиці замість рівності часто використовується нерівність типу ($\leq$) або наближена рівність.

Доцільний вибір критичної області, окрім наведеного співвідношення, може залежати ще й від альтернативної гіпотези H_1. Найчастіше за критичну область Y_1 вибирають множину:

$Y_1 = (U_{1-a}, +\infty)$ (правосторонній критерій)

$Y_1 = (-\infty, U_a)$ (лівосторонній критерій)

$Y_1 = (-\infty, U_{\frac{a}{2}}) \cup (U_{1-\frac{a}{2}}, +\infty)$ (двосторонній критерій)

де U_a - квантиль рівня a умовного розподілу статистики T_n (умовного в припущенні справедливості H_0). Точки, які розділяють множини Y_0 та Y_1, називають *критичними точками*.

В результаті перевірки статистичних гіпотез можуть бути зроблені помилки двох типів. *Помилка першого роду* полягає в тому, що буде відкинута вірна гіпотеза H_0, за умови, що вона має місце. Її ймовірність дорівнює a, якщо виконується рівність $P\{ T_n \in Y_1 \mid H_0\} = a$. У випадку, коли виконується нерівність ($\leq$) або наближена рівність, ймовірність помилки 1-го роду може бути оцінена відповідним чином, а не точно визначена.

Помилка другого роду виникає тоді, коли ми приймаємо гіпотезу H_0, в той час, коли справедлива альтернативна гіпотеза. Ймовірність b помилки другого роду дорівнює $P\{ T_n \in Y_0 \mid H_1\}$.

Гіпотези відносно ймовірностей та середніх значень

Перевірка гіпотези відносно ймовірності

Нехай A – деяка випадкова подія. Маючи результати n незалежних випробувань, в яких подія A спостерігалась m разів, ми хочемо перевірити гіпотезу, що ймовірність події A дорівнює заданому числу p_0, тобто $H_0 = \{P(A)=p_0\}$. На практиці до цієї гіпотези ми, наприклад, приходимо при перевірці відсутності систематичної похибки вимірювань, тобто, відповідності технологічного процесу заданим умовам.

Нехай гіпотеза H_0 справедлива. Тоді маємо схему Бернуллі:

- успіх – подія А відбулась;
- невдача – відбулась подія $\overline{A}$;
- K_n – число успіхів в n випробуваннях.

Тоді, як відомо з курсу теорії ймовірностей, $MK_n=np_0$; $DK_n=np_0q_0$; $q_0=1-p_0$. Користуючись нормальним наближенням біноміального розподілу (теорема Муавра - Лапласа), одержуємо: $T_n = \dfrac{K_n - np_0}{\sqrt{np_0q_0}} \sim h \in N(0;1)$ (статистика T_n має наближено нормальний розподіл з параметрами 0; 1).

При альтернативній гіпотезі $H_1 = \{ P(A) \neq p_0 \}$ і рівні значущості a критична область буде двосторонньою і мати вигляд: $Y_1 = \left(-\infty, -U_{1-\frac{a}{2}} \right) \mathbf{U} \left(U_{1-\frac{a}{2}}, +\infty \right)$, а область прийняття гіпотези Y_0 – це

інтервал $\left(-U_{1-\frac{a}{2}};U_{1-\frac{a}{2}}\right)$. Відзначимо, що при нормальному розподілі $N(0;1)$ квантиль U_a рівня a має властивість U_a =-U_{1-a}.

Якщо знайдене за вибірковими даними значення статистики T_n, належить області Y_0, то гіпотеза H_0 приймається, в протилежному випадку, коли $T_n \in Y_1$, гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 1. Нехай потрібно перевірити відсутність систематичної похибки терезів, тобто H_0 = { P(п) = P(н)=p_0=1/2 }, де P(н) - ймовірність недоважування, P(п) - ймовірність переважування. В досліді проведено 280 зважувань і із них виявилось 151 недоважувань і 129 переважувань.

При справедливості гіпотези H_0 маємо p=1/2; q=1/2 і тоді:

$$T_{280} = \frac{K_{280} - np}{\sqrt{npq}} = \frac{K_{280} - 280 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{280 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = \frac{K_{280} - 140}{\sqrt{70}} \sim h \in N(0;1)$$

Виберемо рівень значущості a=0,05, тоді $1-\frac{a}{2}$= 0,975; $U_{0,975}$=1,96 – квантиль рівня 0,975 нормального розподілу N(0;1). Значення квантиля рівня 0,975 нормального розподілу N(0;1) може бути знайдено, наприклад, із таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x)$. Для цього потрібно знайти значення функції 0.475 у таблиці і відповідно, даного значення, аргумент, Цей аргумент і є потрібним значенням квантиля. Нагадаємо, що $F_{N(0,1)}(x)=\Phi(x)$ + 0,5, а квантиль рівня α - аргумент, при якому функція розподілу приймає значення a.

Критична область $y_1 = (-\infty,-1{,}96) \cup (1{,}96,+\infty)$. Допустима область Y_0 = (-1,96, 1,96). При кількості успіхів (недоважувань) m=151 отримаємо: $T_{280} = \frac{151-140}{8{,}37} \approx 1{,}55$. Таким чином, $T_{280} \in Y_0$ і гіпотеза H_0 приймається (H_0 не суперечить спостереженням).

Зауваження. На практиці наведену вище процедуру перевірки гіпотези відносно ймовірностей можна використовувати коли n>=50; np>=10.

Перевірка гіпотези про середнє значення нормального розподілу. Критерій Стьюдента

Нехай x_1, x_2, …, x_n - ряд незалежних спостережень над випадковою величиною x, яка має нормальний розподіл $N(m, s)$. Параметри m , s - невідомі. Потрібно перевірити гіпотезу H_0= { Mx=m_0 }, де m_0 – деяке задане число. Такого типу задачі часто виникають на практиці, наприклад тоді, коли потрібно визначити наявність систематичних відхилень від номіналу параметрів виробів деякого технологічного процесу.

На підставі вибірки обчислимо $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Розглянемо статистику $T_n = \frac{\bar{x} - m}{S}\sqrt{n}$. Відомо, що випадкова величина T_n має розподіл, який називається - розподілом Стьюдента з (n-1) ступенями волі. Звідси випливає критерій перевірки гіпотези H_0 – критерій Стьюдента. При рівні значущості a вибираємо із таблиць квантилів t-розподілу Стьюдента $t_{кр} = U^{t}_{1-\frac{a}{2}}$ - квантиль рівня $1 - \frac{a}{2}$ розподілу Стьюдента з (n-1) ступенями волі. Відзначимо, що для розподілу Стьюдента $U_a = - U_{1-a}$

Тоді при альтернативній гіпотезі $H_1 = \{ Mx \neq m_0 \}$ і рівні значущості a критична область буде мати вигляд: $Y_1 = \left(-\infty, -U^{t}_{1-\frac{a}{2}}\right) \mathbf{U} \left(U^{t}_{1-\frac{a}{2}}, +\infty\right)$.

Допустима область: $Y_0 = \left(-U^{t}_{1-\frac{a}{2}}, U^{t}_{1-\frac{a}{2}}\right)$. Якщо статистика T_n при $m = m_0$ попадає в область Y_1, то гіпотезу $H_0 = \{Mx = m_0\}$ відхиляємо, якщо $T_n \in Y_0$, то кажемо, що гіпотеза H_0 не суперечить експериментальним даним.

Приклад 2. Вивчається міцність нитки на розрив, в яку ввели новий лавсановий компонент. Значення Y – це розривне зусилля старої нитки без добавки, X - це розривне зусилля нової нитки з добавкою. Досліджувалось десять зразків, що попарно мали однакову довжину. Отримали наступну таблицю значень

Таблиця 6.4

№ досліду	X	Y	Різниця X-Y
1	1.9	0.7	1.2
2	3.2	0.8	2.4
3	1.5	0.2	1.3
4	1.8	0.5	1.3
5	0.1	0.1	0.0
6	4.4	3.4	1.0
7	5.5	3.7	1.8
8	1.6	0.8	0.8
9	4.6	0.0	4.6
10	3.4	2.0	1.4

Виникає запитання, чи існує істотна різниця між старою та новою нитками X та Y. Якщо припустити, що різниця ξ між розривним зусиллям розподілена нормально, то вибірка $X - Y$ буде вибіркою об'єму n=10 нормального розподілу $N(0, \sigma)$ при умові справедливості гіпотези $H_0 = \{ Mx=0 \}$, тобто коли між розривними зусиллями X та Y немає різниці. При цій же умові величина $T_n = \frac{\overline{X - Y} - 0}{S_{X-Y}}\sqrt{10}$ має t – розподіл Стьюдента з 9

ступенями волі; $\overline{X-Y}$, S_{X-Y} - відповідно середнє значення та вибіркове середнє квадратичне відхилення вибірки $X-Y$.

Обчислення згідно наведених вище формул (див. Обчислення статистичних оцінок основних числових параметрів випадкової величини) для вибірки $X-Y$ дають: S_{X-Y}=1.11; $\overline{X-Y}$=1.58; $T_n = \frac{1.58}{1.11}\sqrt{10} = 4.49$. При α=0.05 та 9 ступенях волі $U_{\text{кр}}$= $U^t_{0.975}$=2.26, тоді $Y_1 = (-\infty, -2.26)\,\mathbf{U}\,(2.26, +\infty)$. Ясно, що $T_n \in Y_1$ і гіпотезу H_0 відхиляємо, тобто різниця між розривним зусиллям X та Y значуща. Значення квантилів відповідного рівня α беруться із таблиць квантилів розподілу Стьюдента (Додаток 2).

Перевірка статистичних гіпотез про нормальність розподілу ймовірностей

Нагадаємо, що випадкова величина має нормальний розподіл (позначення $x \in N(\mu, s)$), якщо її щільність розподілу $f(x)$ визначається за формулою: $f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$, де μ, s - деякі числа. Ймовірнісний зміст параметрів μ, s:

μ – математичне сподівання випадкової величини x,

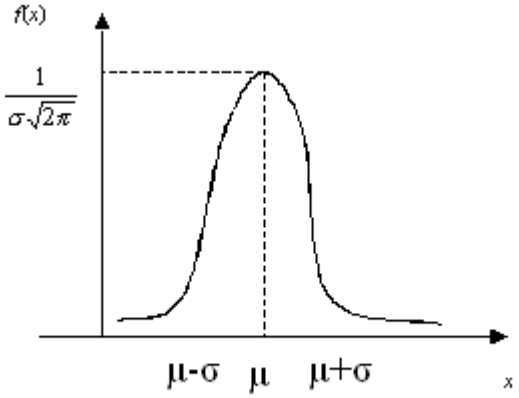


Рис.6.8

s - середнє квадратичне відхилення випадкової величини x.

Графік щільності розподілу випадкової величини x має дзвіноподібну форму і є симетричним відносно прямої $x = \mu$ (див. рис.6.8)

Припустимо, що вибірка значень x_1, x_2, …, x_n випадкової величини x, отримана при тих чи інших спостереженнях. Треба вирішити, чи можна на підставі наявних даних зробити обґрунтоване припущення про нормальність розподілу величини x (інакше – про нормальність теоретичного розподілу ймовірностей). Таким чином, мова йде про перевірку гіпотези H_0={теоретичний розподіл ймовірностей є нормальним}, або скорочено: H_0 = { $x \in N(\cdot, \cdot)$ } (позначення $N(\cdot, \cdot)$ замість $N(\mu, \sigma)$ вживається, коли мова йде про нормальність розподілу взагалі, без припущень щодо конкретних значень параметрів цього розподілу).

З багатьох відомих критеріїв узгодження емпіричних даних з гіпотезою про нормальність теоретичного розподілу в даній роботі треба використати

лише два. Основні принципи, на яких базуються вказані критерії і відповідні дії, що потрібно виконати, формулюються нижче.

1. Візуальний аналіз графічного зображення вибірки

При візуальному дослідженні графічного зображення вибірки(“стеблина з листям”, гістограми, полігони) необхідно звернути увагу на відповідність побудованих рисунків графіку щільності нормального розподілу.

Показниками доброї відповідності є:

а) наявність однієї вибіркової моди, відносно якої розташування даних майже симетричне;

б) поступове спадання графіків до нульового значення при віддаленні від модального значення.

Показниками поганої відповідності є:

а) наявність явної полімодальності (тобто наявність декількох модальних значень);

б) явна асиметрія у побудованих графіках;

в) наявність обривчастих кінців у графіках вибіркових розподілів.

За даними візуального аналізу графічних зображень вибірки можна дати висновок відносно гіпотези нормальності розподілу в наступних термінах:

а) добра відповідність;

б) погана відповідність;

в) нема підстав як для позитивної так і для негативної відповіді.

2. Порівняння вибіркових та очікуваних частот. Критерій c^2.

Одним з основних способів перевірки гіпотези про нормальність є порівняння вибіркових та очікуваних частот. Гіпотезу потрібно відхилити, якщо ці частоти сильно відрізняються між собою.

Одним з варіантів втілення цієї ідеї є критерій c^2. Загальний опис цього критерію дається в додатку 7.

Гіпотеза, що перевіряється: $H_0 = \{x \sim N(\cdot\,, \cdot\,)\}$, причому параметри μ і s невідомі.

Для використання критерію c^2 у нашому випадку необхідно спочатку знайти оцінки невідомих μ і s. За оцінки цих параметрів візьмемо відповідно вибіркове середнє $\overline{x}$ та вибіркове середнє квадратичне відхилення s, отримані за згрупованою вибіркою. Потім числову вісь розіб’ємо на інтервали так, щоб в кожному з них знаходилось би не менше ніж 8 вибіркових значень. Так, зокрема, для знаходження нових інтервалів групування можна використати деякі з інтервалів групування, що вже отримані, об’єднуючи останні, якщо в цьому є потреба.

Приклад 1.

Нехай вибірка задається таблицею “групування - частоти”.

Таблиця 6.5

Номер інтервалу	Границі інтервалів		Середні точки	Абсолютні частоти
1	2.5	5.5	4	3
2	5.5	8.5	7	2

3	8.5	11.5	10	3.5
4	11.5	14.5	13	5.5
5	14.5	17.5	16	5
6	17.5	20.5	19	10
7	20.5	23.5	22	6
8	23.5	26.5	25	2
				37

На інтервалі $(-\infty,2.5)$ немає вибіркових значень. Тому спочатку необхідно розглянути інтервал $(-\infty,5.5)$.

На цьому інтервалі тільки 3 вибіркових значення, що нас не влаштовує. Приєднаємо до розглянутого наступний інтервал групування $(5.5,8.5)$ і розглянемо інтервал $(-\infty,8.5)$. У цей інтервал попадає 5 вибіркових значень, що також нас не влаштовує. Якщо розглянемо інтервал $(-\infty,11.5)$, то одержимо в ньому 8.5 вибіркових значень. Таким чином, перша точка нового групування b_1=11.5. Наступним буде інтервал $(11.5,17.5)$, який містить 10.5 значень за b_2 беремо значення 17.5. Продовжуючи аналогічним чином, одержуємо вторинне групування (див. табл. 6.6).

Таблиця 6.6

Номери інтервалів	Границі інтервалів		Абсолютні частоти
1	$-\infty$	11.5	8.5
2	11.5	17.5	10.5
3	17.5	20.5	10
4	20.5	$+\infty$	8
			37

Статистика критерію $T_{n,r}$ обчислюється за формулою: $T_{n,r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$,

де n – об'єм вибірки; m_i – кількість вибіркових значень, що належать і-му інтервалу; p_i – ймовірність того, що випадкова величина (з розподілом $N(\bar{x}, S)$) належить i-му інтервалу r – кількість інтервалів групування. Нагадуємо, що ймовірність приналежності випадкової величини $x \sim N(\bar{x}, S)$ інтервалу $[b_i, b_{i+1}]$ обчислюється за формулою: $P(b_i \le x \le b_{i+1}) = f\left(\frac{b_{i+1} - \bar{x}}{S}\right) - f\left(\frac{b_i - \bar{x}}{S}\right)$, де функція $f(x)$ - це інтеграл ймовірностей: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Замість функції f можна

використовувати функцію Лапласа $\Phi(x)$: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$,

тобто $P(b_i \le x \le b_{i+1}) = \Phi\left(\frac{b_{i+1} - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{b_i - \bar{x}}{S}\right)$

Зауваження. При розрахунках слід врахувати рівність $f(x) = \Phi(x) + 0.5$, що на відміну від рівностей для функції f: $f(-\infty) = 0$, $f(+\infty) = 1$, для функції $\Phi(x)$ мають місце співвідношення: $\Phi(-\infty) = -0.5$, $\Phi(+\infty) = 0.5$.

Можна вважати, що статистика $T_{n,r}$ при $n > 50$ добре наближується розподілом $c^2_{r\text{-}3}$ (розподілом c^2 з r-3 ступенями волі). Критична область для критерію c^2 правостороння. Відповідними критичними точками є точки $U_{1\text{-}a}$ - квантиль розподілу c^2 з r-3 ступенями волі рівня 1-a, де a - заданий рівень значущості.

Обгрунтування поданого вище способу перевірки нормальності теоретичного розподілу методом c^2 див. У вже згаданому вище додатку 7.

Приклад 2.

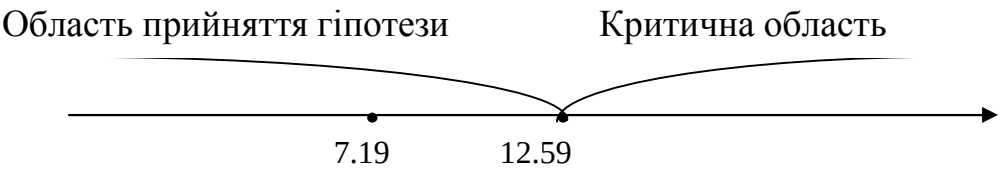
Нехай рівень значущості a = 0.05 і нам потрібно перевірити гіпотезу про нормальність вибірки, відносно якої відомо, що $\bar{x} = 4.3$; S=9.71; n=200 і яка задається таблицею:

Таблиця 6.7

Номер інтервалу	Границі інтервалів		Абсол. частоти m_i	Очікувані ймовірності p_i	Очікувані частоти np_i	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
1	$-\infty$	-15	7	0.023	4.60	9.75	1.25
2	-15	-10	11	0.048	9.50	2.30	0.24
3	-10	-5	15	0.098	19.54	20.52	1.05
4	-5	0	24	0.162	32.68	69.40	2.13
5	0	5	49	0.198	33.58	86.42	2.24
6	5	10	41	0.195	39.90	4.39	0.11
7	10	15	26	0.142	28.38	5.69	0.20
8	15	20	17	0.083	16.62	0.17	0.01
9	20	$+\infty$	10	0.053	10.52	0.25	0.03
		$\sum$	200	1.000	200	194.93	7.19

Значення $T_{n,r}$= $T_{200,9}$=7,19. Критичною точкою є $U^{c^2_{r-3}}_{1-a} = U^{c^2_6}_{1-0.05} = 12.59$.

Значення статистики критерію 7.19 належить області прийняття гіпотези. Завдяки цьому можна стверджувати, що дані не протирічать гіпотезі про нормальність вибірки.



3. Довірча смуга для невідомої неперервної функції розподілу. Кількісна оцінка об'єму вибірки для отримання надійних результатів за допомогою статистики Колмогорова-Смирнова.

При досліджені випадкових величин часто виникає питання про те, якого об'єму потрібно взяти вибірку, щоб забезпечити потрібну надійність отриманих результатів. Наприклад, досліджуючи випадкову величину x кута відновлення тканини після сушіння нас може цікавити питання про те, з якою ймовірністю це число лежить у межах між числами 77,2 та 75,3. Якщо була б відома функція розподілу x, то задача розв'язувалась би просто: $P(77{,}2 < x < 75{,}3) = F_x(75{,}3) - F_x(77{,}2)$. Але функція розподілу невідома. Наближенням, що будується за вибірковими даними, до цієї функції є емпірична функція розподілу. Зрозуміло, що чим більше експериментів ми проведемо, тим краще буде наближення. Якщо, наприклад, нам потрібно, щоб функція розподілу відрізнялася від емпіричної функції розподілу не більше ніж на 0,1, притому, що ймовірність помилки становить 0,05, виникає питання: скільки експериментів при цій умові потрібно провести? Відповідь на це запитання можна отримати, використавши розподіл статистики Колмогорова-Смирнова [12].

З'ясовується, що розподіл статистики D_n: $D_n = D_n(X_1, X_2, ..., X_n) = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$ де $F_n(x)$ - емпірична функція розподілу; $F(x)$ – теоретична функція розподілу; $X_1, X_2, ..., X_n$ - вибіркові значення x, **не залежить** від розподілу випадкової величини x за умови неперервності теоретичної функції розподілу $F(x)$.

Значення статистики D_n можна обчислити за формулою: $D_n = max\{D_n^+, D_n^-\}$, де $D_n^+ = \max\limits_{1 \le k \le n}\left\{\frac{k}{n} - F(x_{(k)})\right\}, D_n^- = \max\limits_{1 \le k \le n}\left\{F(x_{(k)}) - \frac{k-1}{n}\right\}$, $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, …$x_{(n)}$ – розташовані у зростаючому порядку вибіркові значення.

При $n \to \infty$ статистика $\sqrt{n}D_n$ має граничну функцію розподілу $H(z)$, яка задається рівністю $H(z) = 1 - 2\sum\limits_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}e^{-2s^2z^2}, z > 0$. Для усунення залежності від n замість статистики $\sqrt{n}D_n$ використовують модифіковану статистику $\tilde{D}_n$: $\tilde{D}_n = D_n\left(\sqrt{n} + 0{,}12 + \frac{0{,}11}{\sqrt{n}}\right)$. Процентні точки статистики $\tilde{D}_n$ наведено у таблиці 6.8.

Таблиця 6.8. Процентні точки розподілу Колмогорова – Смирнова.

$H(z)$	99%	98%	95%	90%	85%	80%
z	1,63	1,52	1,36	1,22	1,14	1,07

Приклад.
Який об'єм повинен бути у вибірки, щоб побудована за вибірковими значеннями емпірична функція розподілу в кожній точці числової осі відрізнялася від теоретичної функція розподілу не більше ніж на 0,1? Вважаємо, що ймовірність помилки не повинна перевищувати 0,05.
Розв'язок.
З умови задачі випливає, що $P(D_n < \frac{z}{\sqrt{n}}) = P(\sup_x |F_n(x) - F(x)| < \frac{z}{\sqrt{n}}) \cong H(z) = 0{,}95$ (для $n \geq 100$ вираз у круглих дужках для статистики $\tilde{D}_n$ можна вважати наближено рівним $\sqrt{n}$. При значенні $H(z)=0{,}95$ значення $z=1{,}36$. Різниця $\sup_x |F_n(x) - F(x)|$ повинна бути не більше ніж 0,1, тобто $\frac{z}{\sqrt{n}} = 0{,}1$. Звідси $(\frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}36}{\sqrt{n}} = 0{,}1) \Rightarrow (\sqrt{n} = 13{,}6) \Rightarrow (n \approx 185)$. Тобто потрібно провести 185 експериментів, щоб забезпечити потрібну точність у підрахунках.
Зауваження. Відзначимо, що функція розподілу у нашому прикладі може бути, як менше так і більше емпіричної функції розподілу, тобто «коридор» в якому можуть лежати значення теоретичної функція розподілу у нашому прикладі має ширину 0,2.

Зауваження, щодо виключення випадкових незалежних експериментальних даних, що різко виділяються

Сукупність отриманих експериментальних даних часто має значення, що різко виділяються від інших. Це приводить до постановки питання про їхнє виключення з подальшої обробки. Наприклад, отримані значення вихідного параметра процесу або якої-небудь властивості продукту (сировини) різко відрізняються від всіх інших, тому з'являється підозра про істотну зміну умов дослідження у момент його спостереження, неправильної реєстрації параметра або про те, що значення цього параметра є елементом генеральної сукупності, ймовірність появи якого досить мала. Незалежно від причин одержання даних, що різко виділяються від решти, вони можуть істотно спотворити числові характеристики досліджуваної величини. З іншого боку, числові характеристики будуть спотворені при необґрунтованому виключенні таких даних.

В будь якому випадку потрібно проаналізувати умови, при яких дані були отримані. Якщо умови істотно відрізняються від стандартних або встановлених за планом експерименту, то дані необхідно виключити з подальшої обробки незалежно від їхньої величини.

7. Обробка залежних випадкових результатів експерименту. Статистичний аналіз часових рядів

Під часовим рядом розуміється послідовність упорядкованих у часі спостережень, що, як правило, характеризуються взаємозалежністю, корельованістю. Отже, часовий ряд – це сукупність вимірів деякої змінної (будемо позначати її X) здійснених за зростанням часу. Теоретично виміри можуть реєструватися безупинно, але звичайно вони здійснюються через рівні проміжки часу і нумеруються аналогічно елементам вибірки (обсягу n): $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Прикладом часового ряду є результати спостережень за зміною властивостей текстильних матеріалів в процесі їх виготовлення та експлуатації.

Звичайно модель застосовується для інтерполяції, екстраполяції чи прогнозування часового ряду. Якість прогнозу може служити корисним критерієм при виборі серед декількох моделей. Моделі також можуть використовуватися для статистичного моделювання довгих рядів спостережень, при дослідженні великих систем, для яких часовий ряд розглядається як вхідна інформація.

У математичній статистиці використовують три види аналізу часових рядів: регресійний, дисперсійний і коваріаційний.

Ціль регресійного аналізу полягає у встановленні факту наявності чи відсутності залежності між декількома показниками й описі цих зв'язків досить простими виразами. Серед усіх заданих показників (ознак, змінних) один показник вважається результативною ознакою y (відгуком, виходом) і на цей показник впливають інші пояснюючі змінні x_j. У регресійному аналізі всі змінні кількісні.

У дисперсійному аналізі пояснюючі змінні-аргументи x_j – якісні, їх різні числові чи символьні значення визначають приналежність даного спостереження (об'єкта) до тієї чи іншої групи (класу, вибірці). Ціль дисперсійного аналізу – у порівнянні різних вибірок за значенням деякої кількісної ознаки y, наприклад, порівняння значень економічних показників за різні часові періоди.

Якщо серед пояснюючих змінних маються як якісні так і кількісні, то для вивчення зв'язків використовується коваріаційний аналіз. Усі три види статистичного аналізу споріднені і засновані на застосуванні однієї і тієї ж процедури – методу найменших квадратів.

У регресійному аналізі ми будемо спостерігати за зміною тільки однієї характеристики розподілу залежної змінної – центра випадкового значення Y при кожнім значенні X (тобто за зміною умовного математичного сподівання $M(y \mid x)$ при зміні аргументу x) $\mathrm{M}(y \mid x) = f(x)$.

При аналізі одновимірних рядів майже неминуче застосування емпіричних методів. Повна математична модель системи, що спостерігається, ймовірно, не має великого значення, якщо вимірюється тільки одна змінна. Ми неявно припускаємо, що часовий ряд має якусь структуру, тобто спостереження не є набором зовсім незалежних числових значень. Структуру ряду в деяких випадках можна визначити „на око”. Це відноситься, наприклад, до таких компонентів ряду, як постійна складова (тренд) і повторюваність (цикли).

Однак, „на око” можна прийти до висновку про наявність структури і там, де в дійсності має місце лише чиста випадковість. Ми припускаємо, що структуру ряду можна описати моделлю, яка містить невелику кількість параметрів у порівнянні з кількістю спостережень. Далі будемо позначати x_t як спостереження, так і випадковий процес, і з контексту буде зрозуміло, про що йде мова.

В даній роботі при побудові моделей часових рядів розглянемо можливість застосування стохастичного різницевого авторегресійного рівняння p-го порядку (АР(p)) виду: $x_{k+1} = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + a_3 x_{k-2} + ... + a_{p-1} x_{k-p-1} + e_k$, де $a_0, a_1, \mathbf{K}, a_{p-1}$ - параметри моделі (постійні величини), e_k - випадкова змінна, значення якої не вимірюється (*похибки моделі або залишки*), і оцінку якої можна отримати тільки після оцінювання коефіцієнтів моделі, тобто: $e_k = \hat{x}_k - x_k$, де $\hat{x}_k$ - оцінка значення змінної x_k, отримана на основі моделі, x_k - вимір, тобто значення спостереження процесу в момент часу k.

Моделі авторегресійного типу легко інтерпретуються, тому що неважко уявити собі ситуацію, коли поточне значення змінних залежить від одного чи декількох попередніх.

Перевірка стаціонарності процесу

Перед обробкою експериментальних даних необхідно перевірити випадковість значень вибірки.

Стаціонарна випадкова послідовність дискретних вимірювань параметра процесу і безперервна стаціонарна випадкова функція характеризуються наступними умовами:

- математичне сподівання $M(x_t) = m_x = const$ (ряд не містить тренд);
- дисперсія $D(x_t) = D_x = const$ (ряд не гетероскедастичний).

Для стаціонарних часових рядів кореляція між значеннями часового ряду в моменти часу t_1 і t_2 залежить тільки від різниці $t = t_2 - t_1$, а не від абсолютного значення часу і графік її (корелограма) прямує до нуля при $t \to \infty$, тобто $R_{xx}(t_1, t_2) = R_{xx}(t)$ де $R_{xx}(0) = D_x$. Виконання даних умов може служити перевіркою стаціонарності процесу за умови, що значення ряду вимірювань мають нормальний закон розподілу. Обсяг вибірки (довжина реалізації параметра) повинен бути достатнім, щоб у ньому позначилася якийсь тренд (нестаціонарність), якщо він має місце.

При наявності нестаціонарності процесу (гетероскедастичності або тренду) застосовуються спеціальні методи планування експерименту та обробки експериментальних даних.

Моделювання і прогнозування технічних та технологічних процесів

Задачі математичного моделювання і прогнозування зміни властивостей текстильних матеріалів в процесі їх виробництва та експлуатації виникають при створенні систем керування та менеджменту в текстильній промисловості.

Побудова моделі по часових рядах складається з п'ятьох етапів:

- Виконати аналіз процесу (процесів), для якого будується модель на

підставі вимірів вхідних і вихідних змінних, поданих відповідними часовими рядами.

- Вибрати структури моделей-кандидатів, для чого необхідно виконати таке: обчислити і виконати аналіз кореляційної матриці для часових рядів залежної і незалежних змінних із метою визначення змінних, які необхідно включити в модель; обчислити автокореляційну і часткову автокореляційну функцію (тобто значення коефіцієнтів кореляції в момент часу k) для залежної змінної з метою вибору порядку авторегресії p.
- Вибрати метод (методи) для оцінювання коефіцієнтів (параметрів) моделей-кандидатів і оцінити їхні параметри.
- Вибрати кращу (адекватну) модель з отриманої на попередньому етапі множини кандидатів, використовуючи для цієї цілі набір статистичних параметрів.

Перед тим, як перейти до розгляду конкретних етапів побудови моделі, розглянемо поняття структури математичної моделі, що буде використовуватися надалі. Поняття структури моделі містить у собі таке:

1. **Порядок моделі**, тобто порядок диференціального, авторегресійного або іншого рівняння, яке використовується для опису динаміки процесу або об'єкта. Наприклад, стохастичне різницеве авторегресійне рівняння другого порядку має вид: $x_{k+1} = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_{k-1} + e_k$.

Тобто, порядок цього різницевого рівняння визначається числом затриманих у часі значень змінної, які використовуються у правій частині рівняння. Стохастичним воно називається тому, що в правій частині присутня випадкова змінна e_k. Слід зазначити, що введення випадкової складової обов'язково потребує опису її основних (можливих або відомих точно) статистичних характеристик, таких як математичне сподівання, дисперсія, автокореляційна функція і корельованість e_k. Оскільки вона не вимірюється, то оцінити її значення можна тільки після побудови моделі, тобто, $e_k = \hat{x}_k - x_k$ де $\hat{x}_k$ - оцінка змінної x_k, отримана на основі моделі.

2. **Розмірність моделі.** Вона визначається числом рівнянь, які використовуються для опису об'єкту або процесу. Процес, що описують одним рівнянням, називають одномірним або скалярним. Процес, що описують двома і більш рівняннями, називають багатовимірним.

3. **Наявність нелінійностей та їхній характер.** При побудові регресійних моделей частіше усього зустрічаються нелінійності щодо змінних і нелінійності щодо параметрів. Прикладом нелінійності щодо змінних може бути поширена поліноміальна стохастична регресія виду $x_{k+1} = a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + a_3 x_k^3 + e_k$. Нелінійність по параметрах обумовлена наявністю в моделі добутків коефіцієнтів, наприклад, у виді $x_{k+1} = a_0 + a_1 a_2 x_k + a_2 x_k + e_k$.

Визначити наявність нелінійностей - не завжди проста задача. Так, для механічних і деяких інших систем наявність нелінійностей можна визначити шляхом попереднього вивчення законів, закономірностей і особливостей їхній

функціонування. Наприклад, відомо, що для механічних систем характерними є нелінійності типу «люфт», «тертя», білінійності, а для електричних - гістерезис. В даній книзі проблеми виявлення та моделювання нелінійностей не обговорюється, тому далі будемо вважати процеси, що розглядаються, лінійними.

4. **Умови стаціонарності процесу.** Перед обробкою експериментальних даних необхідно перевірити значення часового ряду на стаціонарність тобто наявність тренду чи гетероскедастичності ($D(x_t) \neq const$). Перевірка проводиться за допомогою тестів (тест Дікі-Фуллера – для перевірки на наявність тренду, тест Уайта, тест Бройша-Пагана/Готфрі, тест Голдфельда-Квандта – для перевірки наявності гетероскедастичності [18, 19, 20]).

5. **Час запізнювання** (реакції на виході об'єкта стосовно вхідного сигналу). Запізнювання на виході, якщо воно відомо, достатньо легко враховується як у неперервних, так і в дискретних моделях. Для дискретної моделі у виді різницевого рівняння $x_k = a_0 + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-d} + e_k$ час запізнювання d являє собою ціле число, рівне кількості періодів дискретизації вимірів, на який вихідний сигнал запізнюється щодо вхідного. Період дискретизації вимірів є проміжок часу між вимірами (або моментами реєстрації статистичних даних) і завжди є постійною величиною.

6. **Тип збурень, що діють на процес, і засіб їхнього врахування.** Під збуреннями розуміють вхідні дії процесу, що роблять, як правило, негативний вплив на його протікання, але не використовуються як керуючі. Збурення поділяють на детерміновані і стохастичні, а враховуються вони в адитивній або мультипликативній формі. Вище ми привели різницеві рівняння, у які збурення e_k входять в адитивній формі (адитивність - властивість величин, яка полягає в тому, що значення величини, яка відповідає цілому об'єкту, дорівнює сумі значень величин, що відповідають його частинам). Введення випадкової складової в модель обумовлено такими основними причинами: присутність неконтрольованих зовнішніх збурень, введення в модель зайвих пояснюючих змінних або, навпаки, відсутність у моделі необхідних пояснюючих змінних, вплив методичних похибок, що виникають при обчисленнях.

Етапи побудови моделі часового ряду

Аналіз процесу. На цьому етапі необхідно скористатися всією наявною інформацією про процес з метою визначення числа його входів і виходів; логічних взаємозв'язків між змінними; можливої присутності нелінійностей і їхнього характеру; визначення типу збурень, що діють на процес; визначення присутності запізнювання на якісному і, можливо, кількісному рівнях; приблизного визначення порядку процесу. Необхідно встановити чи є присутнім тренд (на якісному рівні); можливо, що виникне необхідність висунути гіпотезу про існування випадкового тренда; чи є ділянки часових рядів із рівнями коливань, що відрізняються істотно, (присутність гетероскедастичності, тобто, змінність дисперсії в часі). У результаті аналізу процесу необхідно в загальному виді постулювати структуру математичної

моделі, яка буде використовуватися надалі для опису його поведінки. Наприклад, якщо висувається гіпотеза про існування гетероскедастичності, то необхідно вибрати можливий клас моделей для її опису.

Вибір структури моделей-кандидатів. Коефіцієнт кореляції, а в загальному випадку **кореляційна функція**, дозволяють встановити наявність зв'язку між ендогенними (залежними) і екзогенними (незалежними) змінними. Зв’язок може бути лінійним або нелінійним в залежності від типу залежності, що фактично існує між змінними. У більшості практичних випадків розглядають лінійний взаємозв'язок (кореляцію).

Кореляційна матриця дозволяє встановити факт наявності зв'язку між зазначеними змінними. Коефіцієнти кореляції показують ступінь лінійного взаємозв'язку між змінними. Очевидно, що перед тим, як формально обчислити коефіцієнти кореляції, необхідно виконати аналіз процесу і визначити присутність (або відсутність) логічного зв'язку між змінними. Це дозволяє ввести в розгляд тільки ті змінні, що дійсно впливають на залежну змінну. На підставі значень коефіцієнтів кореляції приймається рішення про включення їх у рівняння регресії.

Для визначення необхідності включення в рівняння регресії необхідно обчислити і дослідити вибіркову автокореляційну і часткову автокореляційну функцію змінної x_k. Порядок авторегресії визначається за допомогою автокореляційної функції значення якої обчислюється наступним чином: $r_k = \dfrac{\sum_{t=k+1}^{n}(x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2}$. Число коефіцієнтів автокореляційної функції (АКФ), що відмінні від нуля в статистичному сенсі, і буде задавати порядок авторегресії.

Уточнити порядок авторегресійної складової дозволяє часткова автокореляційна функція (ЧАКФ), що обчислюється відповідно за формулами: $\Phi_{11} = r(1)$, $\Phi_{22} = \dfrac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2}$, . . . , $\Phi_{ss} = \dfrac{r_s - \sum_{j=1}^{s-1}\Phi_{s-1,j} r_{s-j}}{1 - \sum_{j=1}^{s-1}\Phi_{s-1,j} r_j}$, де r_i – значення автокореляційної функції, а $\Phi_{s,j} = \Phi_{s-1,j} - \Phi_{s,s}\Phi_{s-1,s-j}$.

ЧАКФ чіткіше відбиває порядок АР-моделі завдяки відсутності впливу проміжних коефіцієнтів кореляції на вибрані значення змінної, тобто, коефіцієнт Φ_{11} характеризує ступінь взаємозв'язку між розташованими поруч (в часі) значеннями змінної, а Φ_{22} характеризує взаємозв'язок між значеннями змінної, віддаленими на відстані двох періодів дискретизації.

Вважається доцільним розглядати коефіцієнти ЧАКФ і ті номери їх значень, які виділяються поміж іншими (тобто найбільші по модулю) вони і є претенденти на включення до номерів запізнень авторегресійної моделі.

Даний етап закінчується вибором структур декількох моделей-кандидатів, коефіцієнти яких будуть оцінюватися на наступному етапі.

Оцінювання коефіцієнтів моделей-кандидатів. На цьому етапі обчислюють оцінки коефіцієнтів моделей-кандидатів, що відрізняються своєю структурою. Наприклад, можна вибрати авторегресійну частину (модель) першого, другого, третього порядку, або вищих порядків, тобто моделі які можуть бути представлені в загальному вигляді як рівняння лінійної регресій p-го порядку:

$$x_k = a_0 + a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \mathbf{L} + a_{p-1} x_{p-1} + e_k .$$

Найбільш поширеними методами оцінювання параметрів (значень a_0, a_2, …, $a_{p\text{-}1}$) моделі є такі: метод найменших квадратів (МНК) і його модифікації; метод максимальної правдоподібності (ММП); метод допоміжної змінної (МДП); нелінійний метод найменших квадратів (НМНК) і їхні рекурсивні версії.

Для одержання незміщених оцінок вектора параметрів регресійної моделі за допомогою методу найменших квадратів необхідно виконати такі умови:

а) $e_k -$ (залишки моделі) некорельована послідовність випадкових чисел із нульовим середнім;

б) послідовності e_k і x_k не повинні бути корельовані між собою.

Вибір кращої моделі з множини отриманих кандидатів. На цьому етапі вибирають кращу лінійну модель за допомогою множини статистичних параметрів. Для цього:

- оцінюють окремо значимість коефіцієнтів математичної моделі в статистичному сенсі;
- визначають інтегральну похибку моделі стосовно вихідного часового ряду;
- встановлюють наявність кореляції між значеннями похибки моделі (нагадуємо, що вони повинні бути не корельованими);
- визначають ступінь адекватності моделі фізичному процесу в цілому.

У множину статистичних параметрів входять такі наступні:

1. t**- статистика Стьюдента**. Значимість кожного коефіцієнта регресії a_i в статистичному сенсі визначають за допомогою t*-статистики.*

Для визначення значимості коефіцієнта необхідно знати довжину вибірки n, число оцінюваних параметрів p (число ступенів волі дорівнює n-p) і задатися рівнем значимості a (звичайно задаються $a = 0{,}01$, $a = 0{,}05$ або $a = 0{,}1$). Рівень значимості, рівний 0,05, означає, що при оцінюванні регресії ми допускаємо, що помилкове прийняття рішення про значимість оцінок можливо в 5% випадків. Ці параметри дозволяють вибрати по таблицях значення $t_{крит}$. Якщо $-t_{крит} < t_a < t_{крит}$, то нуль-гіпотеза про не значущість коефіцієнта приймається (тобто відповідний коефіцієнт можна не враховувати в регресії); у протилежному випадку вона відхиляється, тобто коефіцієнт вважається значущим.

Статистика підраховується за формулою: $t_a = \frac{\hat{a} - a^0}{SE_a}$, де $\hat{a}-$ оцінка коефіцієнту моделі; a^0- у більшості випадків значення цього коефіцієнту є статистично незначним, тобто можна вважати, що $a^0 = 0$; $SE_a -$ стандартна похибка оцінки коефіцієнта ($SE_a = \sqrt{S^2}$), де $S^2 = \sum_{t=1}^{n} \frac{e_t}{n-p-1}$ міра розкиду залежної змінної навколо лінії регресії . Очевидно, що чим менше значення стандартної похибки, тим кращою є оцінка коефіцієнта для моделі.

Оскільки значення статистики t_a обернено пропорційна стандартній похибці SE_a, то чим більшим буде значення t_a, тим більш високим буде значимість конкретного коефіцієнта.

2. **Коефіцієнт детермінації** R^2. В якості міри інформативності часового ряду часто використовують його дисперсію. Коефіцієнт R^2 - це відношення дисперсії тієї частини часового ряду основної змінної, що описується отриманим рівнянням, до вибіркової дисперсії цієї змінної. Він обчислюється за формулою: $R^2 = \frac{D\hat{x}}{Dx}$, де $D\hat{x}$ - дисперсія змінної, оціненої за допомогою моделі, Dx - дисперсія вимірів змінної.

Очевидно, що для адекватної моделі коефіцієнт детермінації повинен прямувати до одиниці, тобто: $R^2 \to 1$ чим більш адекватно описує отримана модель процес, що досліджується.

3. **Сума квадратів помилок моделі** $\sum e^2{}_k$, $(e_k = \hat{x}_k - x_k)$ тобто $SSE = \sum_{k=1}^{n} [\hat{x}_k - x_k]^2$, де $\hat{x}_k$ - оцінка значення змінної x_k, отримана на основі моделі; x_k - вимір; $n-$ довжина вибірки. Очевидно, що з можливих кандидатів необхідно вибирати ту модель, для якої $\sum e^2{}_k$ приймає мінімальне значення.

4. **Інформаційний критерій Акайке** (AIC)**.** Цей критерій враховує суму квадратів похибок, число вимірювань N і число оцінюваних параметрів p (порядок авторегресії): $AIC = N \ln\left[\sum_{k=1}^{N} e_k^2\right] + 2p$**.** Очевидно, що для кращої моделі критерій має менше значення, оскільки він залежить від суми квадратів похибок (СКП). Проте, крім СКП даний критерій враховує довжину вибірки і число оцінюваних параметрів, що робить його більш інформативним.

5. **Критерій Байеса-Шварца** (BSC)**.** Даний критерій схожий на попередній, проте він додатково враховує довжину вибірки за допомогою члена $\ln(n)$: $BSC = n \ln\left[\sum_{k=1}^{n} e^2{}_k\right] + p\ln(n)$**,** його використовують при довгих вибірках вимірювальних даних.

6. **Статистика Дарбіна-Уотсона** (Durbin-Watson). Статистика Дарбіна-Уотсона обчислюється за формулою: $DW = \frac{\sum_{i=2}^{n}(e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=2}^{n} e_i^{\,2}}$. Цей параметр дозволяє визначити ступінь корельованості похибок моделі. При повній відсутності кореляції між похибками $DW = 2$, це найбільше прийнятне значення даного параметра. При виборі кращої моделі серед декількох кандидатів обирається та для якої значення $|DW\text{-}2|$ найменше.

7. **Статистика Фішера** F**,** яка визначає ступінь адекватності моделі в цілому. Для адекватної моделі виконується умова: $F > F_{крит}$, де $F_{крит}$ визначається по таблиць для F - розподілу. Значення $F = \frac{R^2/(p-1)}{(1-R^2)/(n-p)}$, де R^2 – коефіцієнт детермінації. Таким чином, більшому значенню F відповідає більш адекватна модель.

Послідовність застосування цієї статистики можна представити наступним чином:

- задається рівень значимості a (0.1, 0.05 або 0.01);
- користуючись значеннями n – довжина ряду, p – порядок авторегресії та a знаходимо критичне значення $F_{крит}$ із таблиць для F – розподілу при (p, n-p-1) ступенях волі;
- якщо $F > F_{крит}$ то модель адекватна, інакше гіпотезу про адекватність моделі відхиляємо.

8. **Коефіцієнт Тейла** є дуже важливим індикатором точності моделі і її сумісності: $U = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x}_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i)^2} + \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x}_i)^2}}$**.** За побудовою, його величина знаходиться між 0 і 1. Якщо U=1, модель не може бути використана для прогнозу. Прогнозовані, на основі отриманої моделі, і реальні ряди є не корельованими. У протилежному випадку, якщо U=0, прогнозовані ряди співпадають з реальними рядами і модель є ідеальною, тобто чим менше значення U, тим більш отримана модель придатна для прогнозування.

При виборі найкращої моделі серед розглянутої множини моделей можна застосовувати наступний консолідований критерій адекватності, який враховує вищенаведені статистики:

$$KK = e^{1-R^2} + \frac{RSS}{N} + \begin{cases} \ln(AIC + BSC), & AIC + BSC > 0 \\ e^{AIC+BSC}, & AIC + BSC \le 0 \end{cases} + e^{2-DW} + e^{U}.$$

Після вибору структури математичної моделі для описання динаміки часового ряду необхідно оцінити параметри вибраної структури. Сформулюємо задачу оцінювання для моделей класу авторегресії АР(p) на основі мінімізації суми квадратів похибок виходу моделі.

Вхідні спостереження над об'єктами, що досліджуються, позначимо наступними незалежними змінними x_i (i = 1, …. n), а вихідні – залежними випадковими змінними Y_j (j = 1 , … n - p, нагадаємо, що p - порядок авторегресії). Припустимо, що Y_1 , Y_2 …. Y_{n-p} – некорельовані спостереження випадкової величини ζ, а X ={ x_{ij} }- відома матриця ($n \times n - p$) спостережень над множиною змінних { X_i }, які є стовпцями цієї матриці. Припустимо, що кожна величин Y_j спостерігається з випадковою похибкою ε_i, яка не перевищує значень границь довірчого інтервалу заданого рівня, та лінійно залежить від n + 1 невідомих коефіцієнтів a_i (0, … p), тоді:

$$Y_j = a_0 + \sum a_i X_i + e_j \qquad (7.1)$$

В задачах регресійного аналізу основною задачею є оцінка коефіцієнтів a_i за результатами початкових спостережень x_{j0}, x_{j1} …. x_{jn-p} вихідної змінної Y_j . Приймемо, що x_{j0} = 1 (j = 1, … n-p) (тому, що вимір при коефіцієнті a_0 завжди дорівнює 1) і введемо наступні позначення:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_{n-p} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_{1,0}x_{1,1}x_{1,2}\ldots x_{1,p} \\ x_{2,0}x_{2,1}x_{2,2}\ldots x_{2,p} \\ \ldots \\ \ldots. \\ x_{n-p,0}x_{n-p,1}x_{n-p,2}\ldots x_{n-p,p} \end{pmatrix}; \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_{n-p} \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_p \end{pmatrix}; \qquad (7.2)$$

Звідси лінійна модель в матричному вигляді є наступною:

$$Y = XA + e \qquad 7.3)$$

Розв'язок задачі лінійного регресійного аналізу (7.3) будемо знаходити при наступних припущеннях:

- значення ε_i є некорельованими і мають нульове середнє та однакову скінченну дисперсію: $M(\varepsilon) = 0$ та $D(\varepsilon) = \sigma^2 = const$;
- матриця початкових даних X задана і відома без помилок ;
- стовпці матриці X є лінійно незалежними;
- математичне сподівання залежної змінної є лінійною функцією невідомих коефіцієнтів: $\grave{I}Y = \tilde{O}\hat{a}$

Застосування методу найменших квадратів призводить до оцінки $\hat{A}$ - вектора коефіцієнтів, що є розв'язком системи нормальних рівнянь:

$$(X^T X)A = X^T Y \qquad (7.4)$$

За умови, що X є матрицею повного рангу, вказаний розв'язок має наступний вигляд:

$$\hat{A} = (\tilde{O}^{\grave{O}}\tilde{O})^{-1}\tilde{O}^{\grave{O}}Y \qquad (7.5)$$

Виходячи з вищенаведених допущень оцінка (7.4) параметрів моделі (7.5) має наступні властивості:

- математичне сподівання ($M\hat{a} = a$) дорівнює істинному значенню невідомого параметра a, таким чином оцінка $\hat{a}$ є незміщеною;

- в класі лінійних незміщених оцінок інша оцінка буде мати більшу дисперсію, таким чином оцінка $\hat{a}$ є ефективною;

- оцінка a є обґрунтованою і збігається за імовірністю до істинного значення: $lim(\|\hat{a} - \alpha\| > \sigma) = 0$, $\forall\sigma > 0$, де вираз $\|\cdot\|$ - деяка визначена норма.

За умовою, що відхилення ε_i розподілені нормально з нульовим середнім ($M(\varepsilon) = 0$) та скінченною дисперсією σ^2, можна використовувати t - та F – критерії для перевірки гіпотез про адекватність моделі, значимості параметрів та при визначенні довірчих інтервалів.

Приклад

Графік значень спостережень зміни лінійної густини в процесі виробництва напіввовняної пряжі по етапам виробництва (1-чесальна стрічка, 2-стрічка першого переходу, 3- стрічка першого переходу, 4-перша гребінна стрічка, і т.д.) (рис. 7.3.).

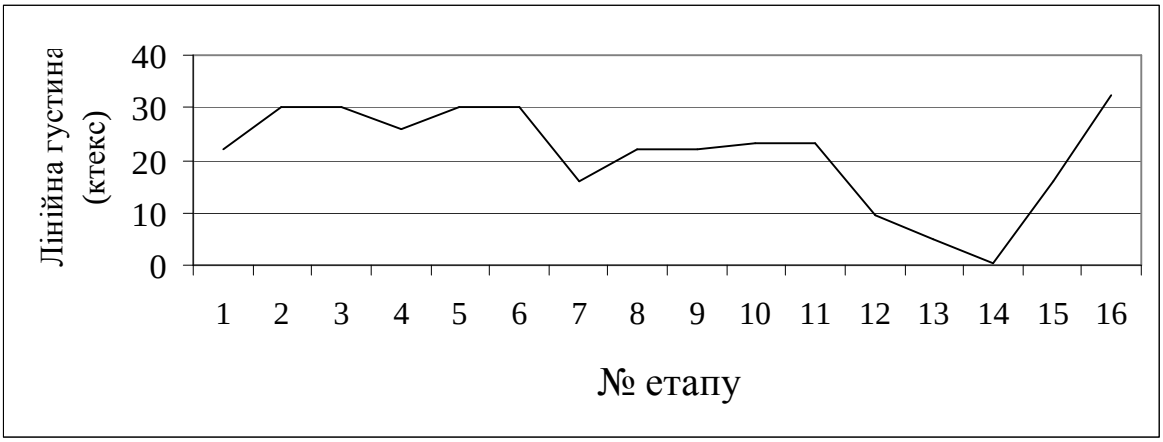


Рис. 7.3.

Для попередньої оцінки порядку авторегресійної моделі були обчислені автокореляційна і часткова автокореляційна функції. На рис. 7.3., 7.4. зображені значення АКФ і ЧАКФ.

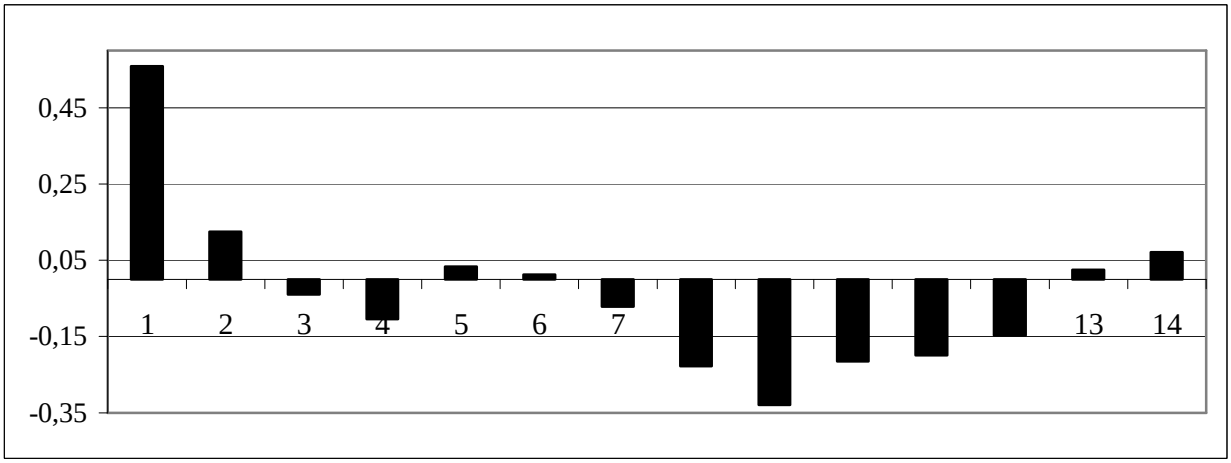


Рис. 7.3. Значення автокореляційної функції

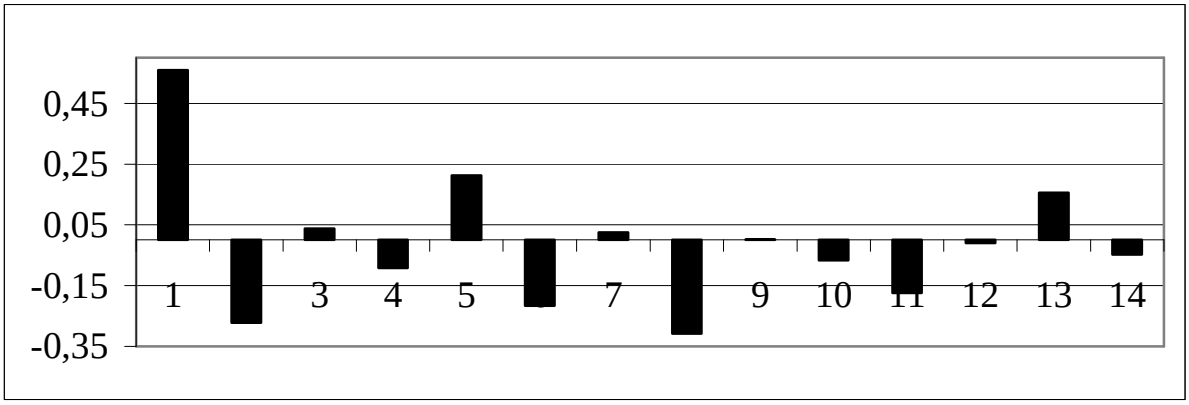


Рис. 7.4. Значення часткової автокореляційної функції

У результаті дослідження АКФ і ЧАКФ встановлено наступне:

1. АКФ і ЧАКФ повільно сходяться до нульових значень.

2. Серед коефіцієнтів ЧАКФ, що виділяються, необхідно проаналізувати наступні значення: $\Phi_{1,1}$ = 0,559; $\Phi_{2,2}$ = -0,272; $\Phi_{5,5}$ = 0,213; $\Phi_{6,6}$ = 0,216; $\Phi_{8,8}$ = -0,308. У цілому з аналізу ЧАКФ можна зробити висновок, що порядок авторегресії може приймати значення від 1 до 8.

3. Отримана АКФ спадає до нуля дуже повільно і спостерігається періодичність, а тому даний ряд можливо містить тренд.

Проаналізувавши значення ЧАКФ (рис. 7.4) робимо висновок, що для математичного опису процесу необхідно скористатися моделями АР(1), АР(2), АР(5), АР(6) та АР(8). У таблиці 7.1 наведені варіанти оцінювання декількох можливих структур регресійних моделей. В дужках у першому рядку наведені номери запізнень, що входять до складу авторегресійної моделі.

В наведеній таблиці RSS (residual square sum) - сума квадратів залишків (похибок моделі); AIC – інформаційний критерій Акайке; BSC – критерій Байєса-Шварца; DW – статистика Дарбіна-Уотсона; F – статистика Фішера; R^2 – коефіцієнт детермінації.

Таблиця 7.1.

Варіанти оцінювання регресійної моделі

	p=1 (1)	*p*=2 (1,24)	*p*=5 (1, 2, 5)	*p*=6 (1, 2, 5, 6)	*p*=8 (1, 2, 5, 6, 8)
a_0	8,458	11,649	-4,933	-20,992	26,547
a_1	0,618	0,926	0,854	0,508	1,331
a_2		-0,484	-0,698	-0,709	-0,620
a_3			0,836	1,127	1,148
a_4				0,548	-0,875
a_5					-1,034
RSS	893,3	664,1	248,2	248,2	32,8
AIC	7,191	7,126	7,049	7,049	5,748
BSC	7,286	7,263	7,201	7,201	5,807
DW	1,261	2,092	2,480	2,480	1,262
R^2	0,346	0,479	0,583	0,705	0,960
KK	7,807	6,093	5,103	4,929	5,621

З таблиці 7.1. видно, що комплексний критерій виявився мінімальним для моделі АР(6), в яку входять запізнення з номерами 1, 2, 5, 6. Отже краща модель має наступний вигляд:

$$x_{n+1} = -20{,}992 + 0{,}508x_n - 0{,}709x_{n-1} + 1{,}127x_{n-4}. + 0{,}548x_{n-5}.$$

Графік часового ряду згенорованого за отриманою моделлю у порівнянні з вхідним рядом має вигляд зображений на рис. 7.5.

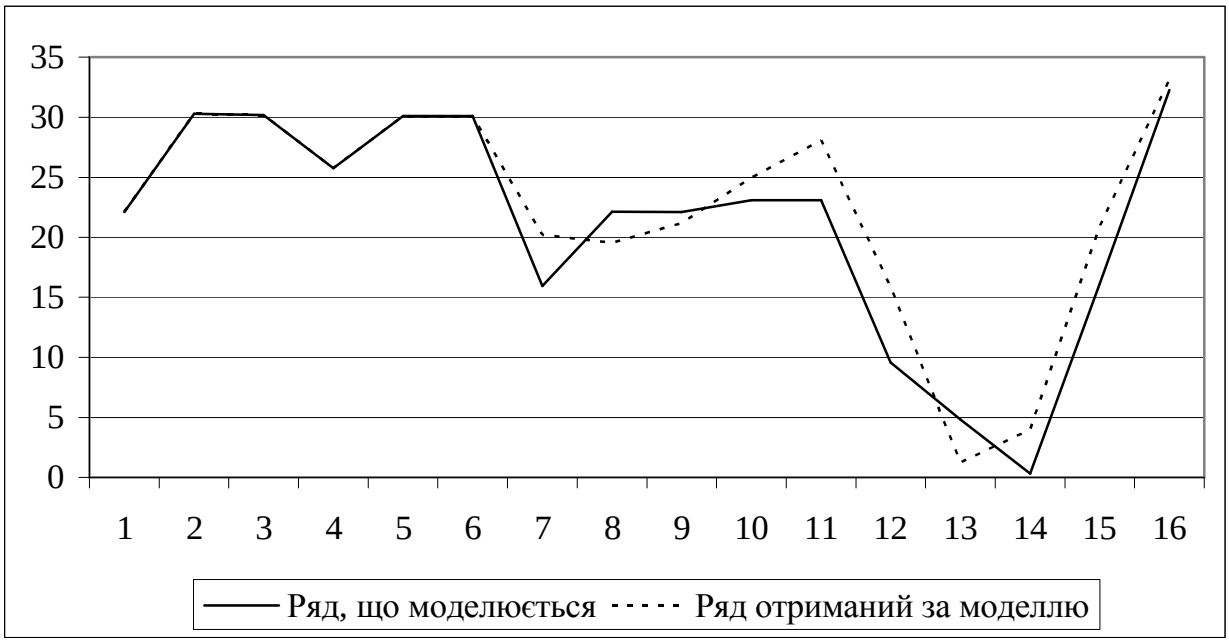


Рис. 7.5

Методи моделювання та вилучення детермінованих і стохастичних трендів

Тренд (від англ. Trend - тенденція) - тенденція зміни досліджуваного часового ряду. Тренди можуть бути описані різними рівняннями - лінійними, логарифмічними, поліноміальними і т. д. Фактичний тип тренду встановлюють на основі підбору його функціональної моделі статистичними методами або згладжуванням вихідного часового ряду. Прикладами рівнянь, що описують детермінований тренд, можуть бути рівняння прямої, поліному або іншої функції:

$$y_k = a_0 + c_1 k,$$
$$y_k = a_0 + c_1 k + c_2 k^2 + ... + c_m k^m,$$
$$y_k = \exp(ck).$$

Можна сказати, що тренд описує довгострокові зміни процесів. Якщо тренд описується випадковою функцією, то його називають *стохастичним*.

Для опису динаміки процесів з трендами широко застосовують рівняння авторегресії. Таке рівняння має наступну структуру:

y_k = *детермінований, або стохастичний тренд + авторегресія*.

Розв'язки рівнянь АР містять складові, які описують тренди, детерміновані і нерегулярні компоненти процесу. Вони описують відносно тривалі періоди стійкого спаду/зростання процесів або детерміновані коливання. Очевидно, що для повного опису процесу наведені рівняння необхідно розширювати відповідними складовими. Випадкові тренди можна описати комбінаціями випадкових величин. В загальному випадку процес може містити як детерміновану, так і випадкову складову.

Детермінований тренд називають ще *глобальним трендом* процесу. Однак, на сьогодні існує тенденція до вироблення більш загального підходу до описання тренду, а саме, використання *локальних* моделей замість глобальних. При цьому тренд розглядають як стохастичну функцію часу. Одним із підходів до описання локального тренду є введення залежності коефіцієнтів моделі від часу: $y_k = a_k + d_1 k$, де $a_k -$ локальна константа; $d_1 -$ коефіцієнт, який визначає локальний нахил тренду. Такі функції є більш адекватними ніж детерміновані функції поліноміального типу.

Модель випадкового кроку є однією з найпростіших, яка дозволяє описати випадковий тренд в деяких випадках. Вона має вигляд: $y_k = y_{k-1} + e_k$, або $\Delta y_k = e_k$, де $\varepsilon(k) -$ білий шум з нульовим середнім, $\Delta y_k = y_k - y_{k\text{-}1}$. $\Delta y_k -$ називаються різницями першого порядку. Приростом значення основної змінної в даній моделі є випадкова величина.

При моделюванні процесів, нестаціонарних відносно тренду, можна описати тренд за допомогою вибраної детермінованої чи випадкової функції або видалити його зовсім з процесу і описувати математично тільки коливання, які накладаються на тренд. Для вилучення тренду застосовують два методи:

– *обчислення різниць* першого або вищого порядку;

– *описання тренду* за допомогою вибраної функції з подальшим використанням для описання коливань залишків від тренду.

Зазвичай процес Dy_k стаціонарний, але якщо це не так, то необхідно обчислювати різниці другого порядку $D^2y_k = Dy_k - Dy_{k\text{-}1}$. Можливі випадки коли для досягнення стаціонарості необхідно брати різниці вищих порядків.

Моделі, стаціонарні відносно різниць та тренду

Вище ми розглянули два типи моделей нестаціонарних часових рядів: моделі із *стохастичними* та *детермінованими* трендами. Моделі (процеси), *стаціонарні відносно різниць* (СВР), можна трансформувати в стаціонарні моделі шляхом диференціювання. Моделі (процеси), *стаціонарні відносно тренду* (СВТ), можна перетворити в стаціонарні шляхом вилучення детермінованого тренду.

При видаленні тренду може виникнути серйозна проблема, якщо застосувати некоректний метод. В загальному випадку введення компоненти детермінованого тренду в регресію у випадку, коли насправді його немає, призводить до помилки вибору структури моделі. Може здатись, що детермінований тренд можна оцінити, використовуючи таку регресію. Однак, всі коефіцієнти моделі будуть в даному випадку лише статистичними артефактами в присутності нестаціонарних похибок моделі.

Приклад

Порівняємо результати вилучення трендів різними способами на прикладі часового ряду, значень спостережень ступеня розпрямленості та орієнтації волокон при виробництві напіввовняної пряжі по етапам виробництва динаміка якого наведена на рис. 7.7.

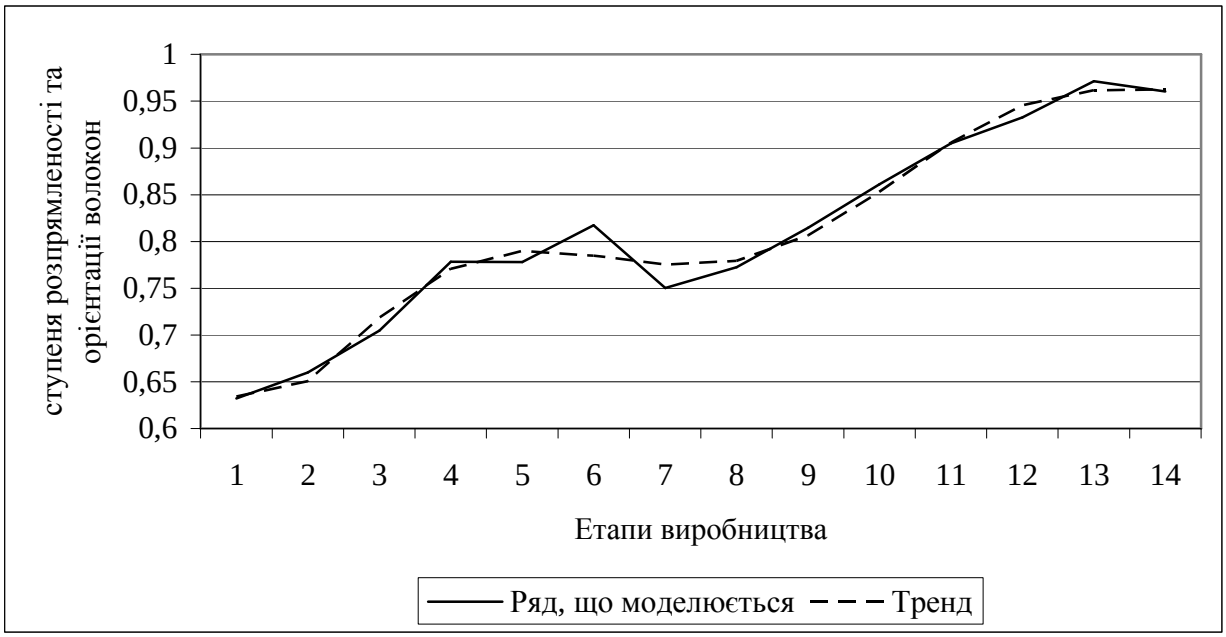


Рис. 7.7.

Спробуємо описати наш часовий ряд поліномом шостого ступеня. В результаті отримуємо наступний поліном : $x_k = 0{,}81 - 0{,}343k + 0{,}213k^2 - 0{,}051k^3 + 0{,}0058k^4 - 0{,}0003k^5 + 0{,}000006k^6$.

Оскільки очевидно, що коефіцієнти при k^6 не значимий, то це свідчить про те, що при моделюванні тренда як поліному можна скористатись наступним рівнянням: $x_k = 0{,}81 - 0{,}343k + 0{,}213k^2 - 0{,}051k^3 + 0{,}0058k^4 - 0{,}0003k^5$, після вилучення даного тренду ряд залишків(тобто різниця між значеннями часового ряду і значеннями поліному в точках $k = \overline{1,n}$) має вигляд наведений на рис. 7.8.

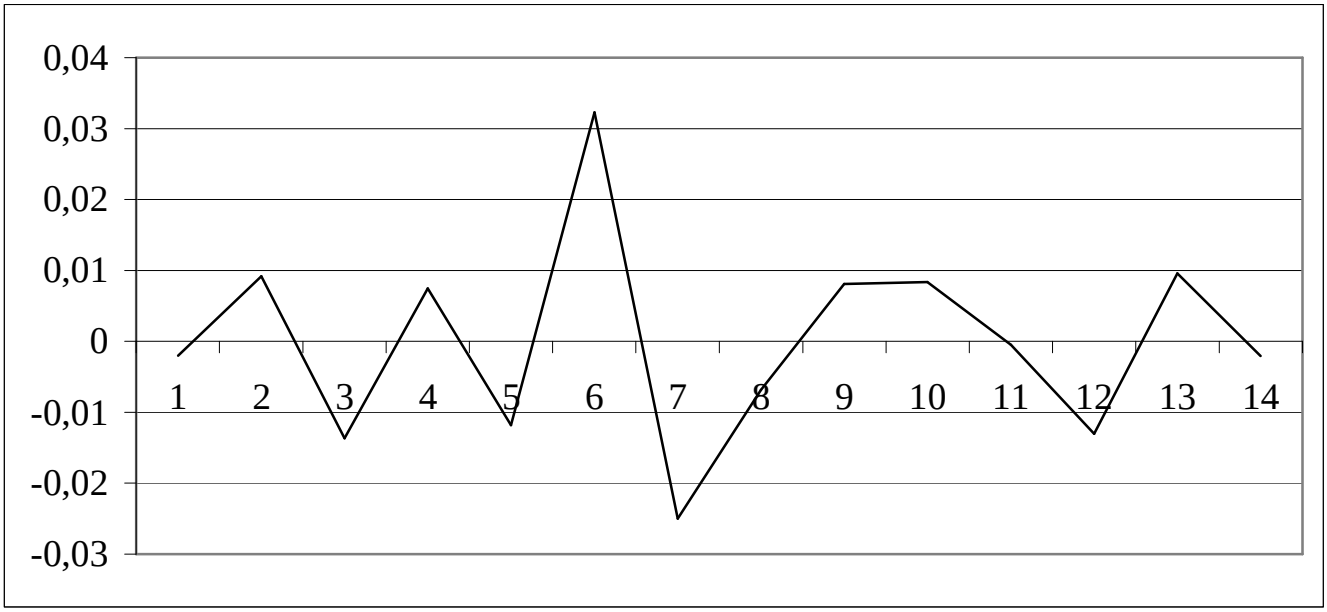


Рис. 7.8. Динаміка часового ряду після вилучення тренду

Оскільки отриманий ряд є також часовим, то за методикою наведеною вище визначаємо модель, яка описує залишки $e_k = 0{,}00047 - 0{,}517e_{k-1} - 0{,}233e_{k-3}$.

Статистичні параметри отриманої моделі, які характеризують ступінь її адекватності, наступні: RSS=0,0015; AIC=-5,5389; DW=2,5; R^2=0,364; KK=2,486.

Динаміку перших різниць ряду, що розглядається, наведено на рис. 7.9.

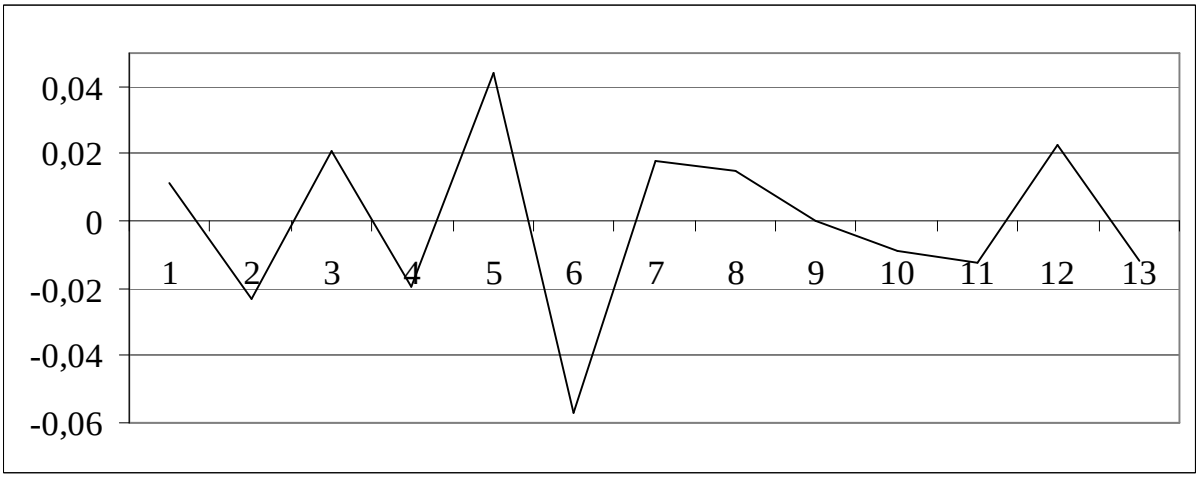


Рис. 7.9. Динаміка перших різниць часового ряду

Побудувавши модель ряду, яка описує перші різниці, маємо: $\Delta x_k = 0{,}000558 - 0{,}643\Delta x_{k-1} - 0{,}121\Delta x_{k-3}$. Статистичні параметри отриманої моделі, які характеризують ступінь адекватності моделі, наступні: RSS=0,00355; AIC= -4,506; DW=2,58; R^2=0,495; KK=2,216.

Таким чином, в результаті видалення тренду за допомогою знаходження перших різниць отримано модель з кращими статистичними характеристиками. Це свідчить про те, що процес має стохастичний тренд.

Перевірка часових рядів на гетероскедастичність

Для перевірки часових рядів на гетероскедастичність (тобто, змінність дисперсії в часі) використовуються різні тести, наприклад: тест Уайта, тест Бройша-Пагана/Готфрі, тест Голдфельда-Квандта [19, 20].

На практиці часто застосовують спрощений тест на гетероскедастичність, який складається з наступних кроків:

1. Оцінити авторегресію, застосувавши модель першого ($x_k = a_0 + a_0 x_{k-1} + e_k$) або більш високого порядку, наприклад другого чи третього.

2. Побудувати ряд $\{e^2_k\}$, скориставшись залишками від оцінювання попередньої моделі.

3. Оцінити регресію: $e^2_k = \alpha_0 + \alpha_1 [0.4e^2_{k-1} + 0.3e^2_{k-2} + 0.2e^2_{k-3} + 0.1e^2_{k-4}]$.

4. Якщо коефіцієнт α_1 відмінний від нуля в статистичному сенсі, тобто є значимим, то отримана модель для $e^2(k)$ описує гетероскедастичний процес. Оскільки в цій моделі оцінюються тільки коефіцієнти α_1 і α_0 а всі інші відомі (0.4; 0.3; 0.2; 0.1), то для визначення відмінності від нуля коефіцієнта α_1 можна застосувати *t*-статистику для цього коефіцієнта.

Привабливість даного тесту полягає в простих обчисленнях і можливості застосування тієї ж теорії перевірки гіпотез, що використовується при аналізі лінійних моделей.

З метою підвищення ймовірності прийняття правильного рішення щодо наявності гетероскедастичності на практиці, як правило, застосовують декілька тестів.

Алгоритм побудови гетероскедастичної моделі

Для прикладу розглянемо спочатку авторегресійну модель гетероскедастичного процесу:

$$e_k^{\,2} = a_0 + \sum_{i=1}^{q} a_i e^2_{k-i} + n_k . \qquad (7.11)$$

Математичне сподівання для n_k: $M[n_k] = 0$. Рівняння 7.11, називають авторегресійним умовно гетероскедастичним (АРУГ).

Припустимо, що $\{x_k\}$ - це процес авторегресії. При побудові моделі процесу в даному випадку можливі наступні варіанти:

- якщо вдається побудувати адекватну модель АР, то похибки моделі будуть мати властивості білого шуму;

- якщо не вдається побудувати адекватну модель АР, то, використовуючи автокореляційну функцію для квадратів залишків, необхідно побудувати модель АРУГ, яка дозволяє виконати аналіз поведінки дисперсії процесу; корелограма процесу $\{e_k^{\,2}\}$ дає можливість визначити присутність гетероскедастичності.

За своєю структурою рівняння 7.11 схоже на рівняння АР(p), наведеного вище, для послідовності $\{e_k^{\,2}\}$.

Методику побудови моделі гетероскедастичного процесу можна узагальнити наступним чином:

Крок 1. При необхідності зробити попередню обробку експериментальних даних (нормування, логарифмування, заповнення пропусків даних) і застосувати до них тести на гетероскедастичність. Якщо процес містить тренд, то перед побудовою моделі необхідно його видалити. Для підвищення надійності тестування необхідно застосувати не менше двох тестів. Зокрема, досвід побудови моделей свідчить, що, необхідно користуватись спрощеним тестом, який є досить наглядним і відносно простим. Досить часто візуальний аналіз даних дозволяє отримати суттєву інформацію щодо присутності гетероскедастичності. Разом з візуальним аналізом корисно розглядати параметри описової характеристики, які полегшують визначення структури моделі.

Крок 2. Користуючись АКФ і ЧАКФ для експериментальних даних побудувати модель АР(p) для процесу $\{x_k\}$ та обчислити ряд з квадратів залишків $\{\hat{e}_k^{\,2}\}$, де $\hat{e}_k = e(k)$. Обчислити вибіркову дисперсію $s_{\hat{e}}^2$ збурення $\hat{e}_k$: $s_{\hat{e}}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N} \hat{e}_k^{\,2}$, де $n-$ число залишків після побудови моделі АР.

Крок 3. Побудувати авторегресійну умовно гетероскедастичну (АРУГ) модель (7.11), використовуючи ряд значень $\hat{e}_1^{\,2}(k)$. Якщо в цій моделі хоча б один із коефіцієнтів $\alpha_i, i \in 1,...,q$ є значимим, то процес є дійсно гетероскедастичним. Оскільки (7.11) описує залишки моделі з деяким наближенням, то в загальному випадку доцільно продовжити процес уточнення моделей, що описують вихідний процес в цілому. Тобто, можна уточнити початкову модель АР(p) (тобто ввести нові запізнення), а також модель типу (7.11).

Крок 4. Процес оцінювання моделі закінчується в тому випадку, коли виконуються наступні вимоги:

a) процес $\{\hat{e}_k\}$- центрований, тобто $M[\hat{e}_k] = 0$;

b) процес $\{n_k\}$не містить в собі інформацію про дисперсію процесу, тобто він некорельований з $\{\hat{e}_k\}$;

c) процес $\{n_k\}$ некорельований з квадратами залишків, отриманих на попередньому етапі.

Алгоритм аналізу корелограми квадратів залишків можна записати наступним чином:

<u>Крок 1:</u> Побудувати по можливості адекватну модель АР для послідовності $\{x_k\}$ і побудувати додатковий ряд із квадратів похибок $\hat{e}_k^{\,2}$. Обчислити вибіркову (на основі значень елементів ряду) дисперсію залишків $\hat{s}^{\,2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\hat{e}_k^{\,2}}{n}$, де $n-$ кількість елементів ряду похибок.

Крок 2: Обчислити вибіркову автокореляційну функцію квадратів.

Крок 3: Індивідуальні значення змінної $r(s)$, які суттєво відрізняються від нуля, вказують на наявність гетероскедастичності процесу.

Приклад

Розглянемо ряд спостережень нерівноти за лінійною густиною (%) при виробництві напіввовняної пряжі по етапам виробництва, динаміка якого наведена на рис. 7.10.

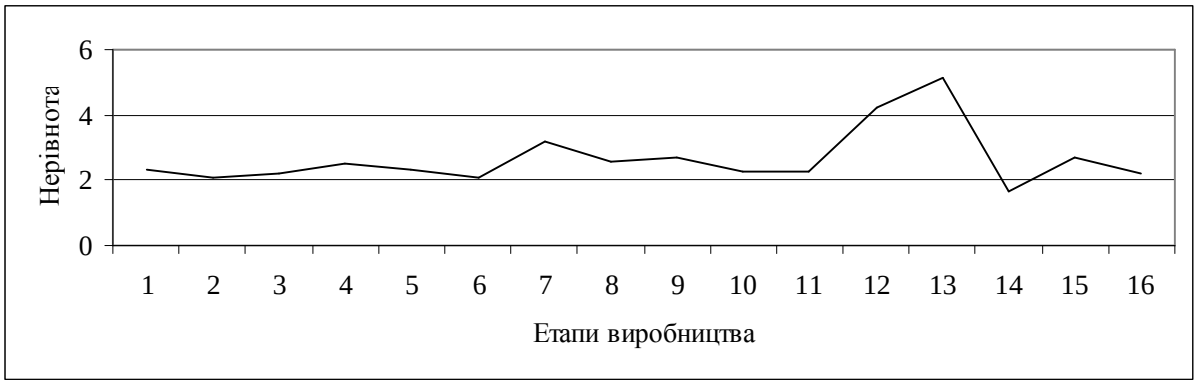


Рис.7.9.

Ряд квадратів залишків (ε^2_k) даного процесу після його моделювання ($x_{n+1} = 2{,}982 + 0{,}105x_{n-1} - 0{,}208x_{n-2}$), а також значення АКФ і ЧАКФ для квадратів залишків подана на рис. 7.11-7.13.

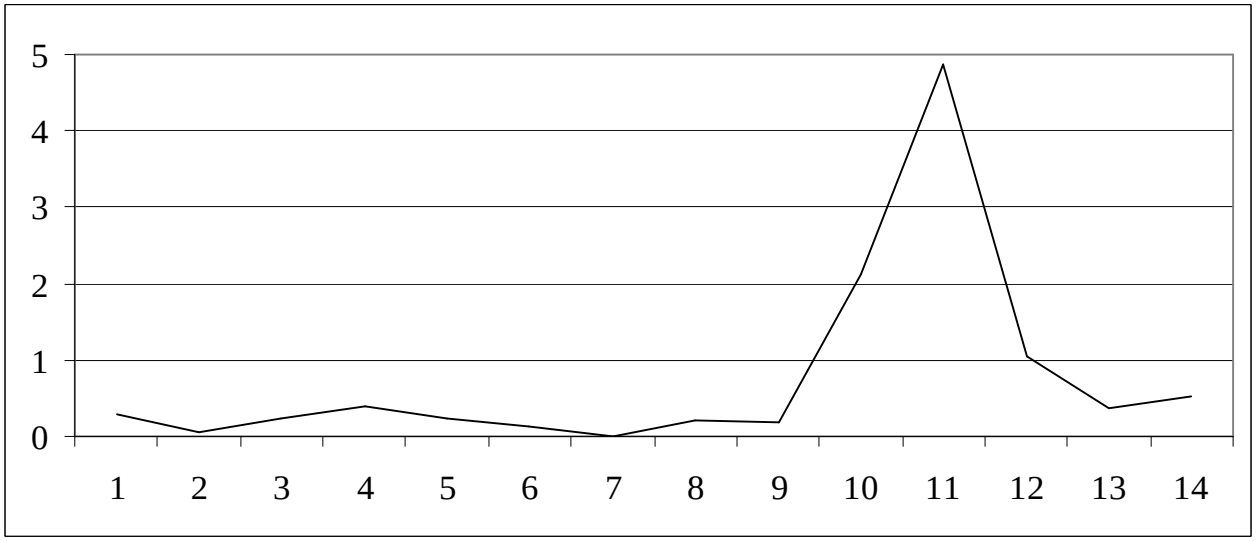


Рис.7.11. Динаміка ряду ε^2_k

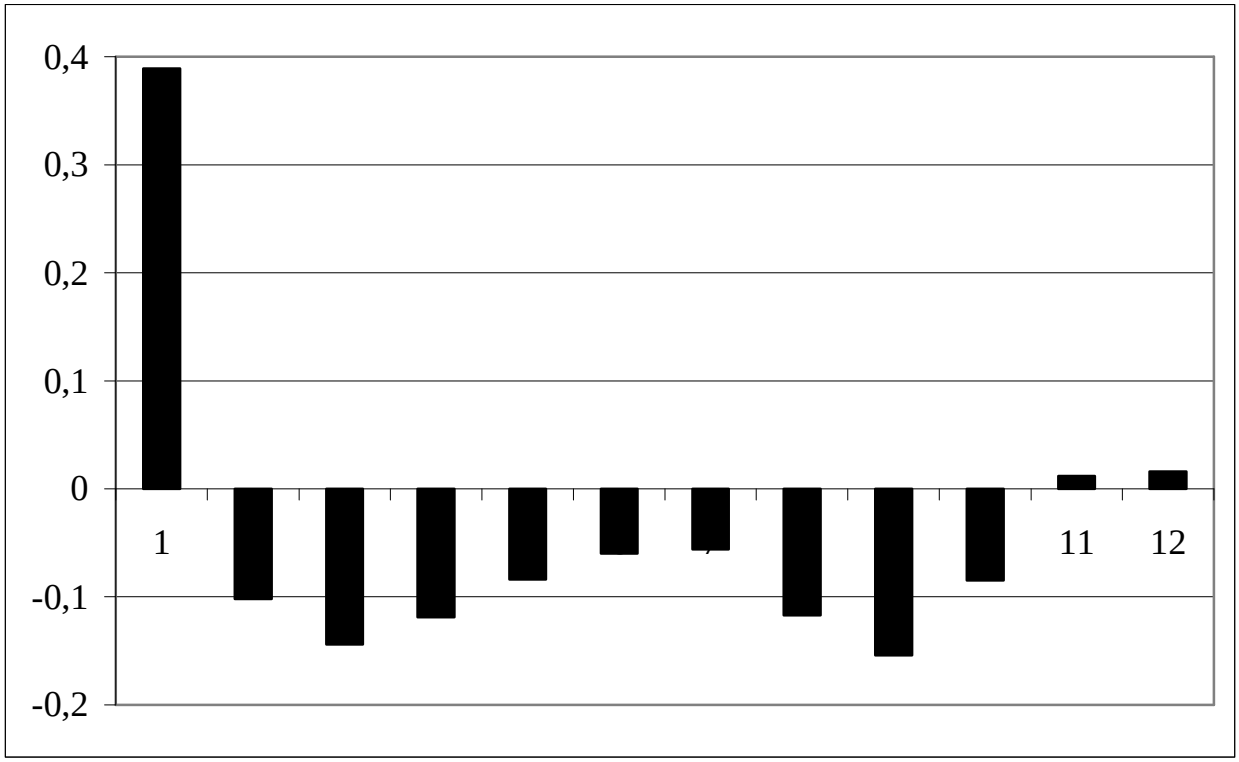


Рис. 7.12. Автокореляційна функція ряду

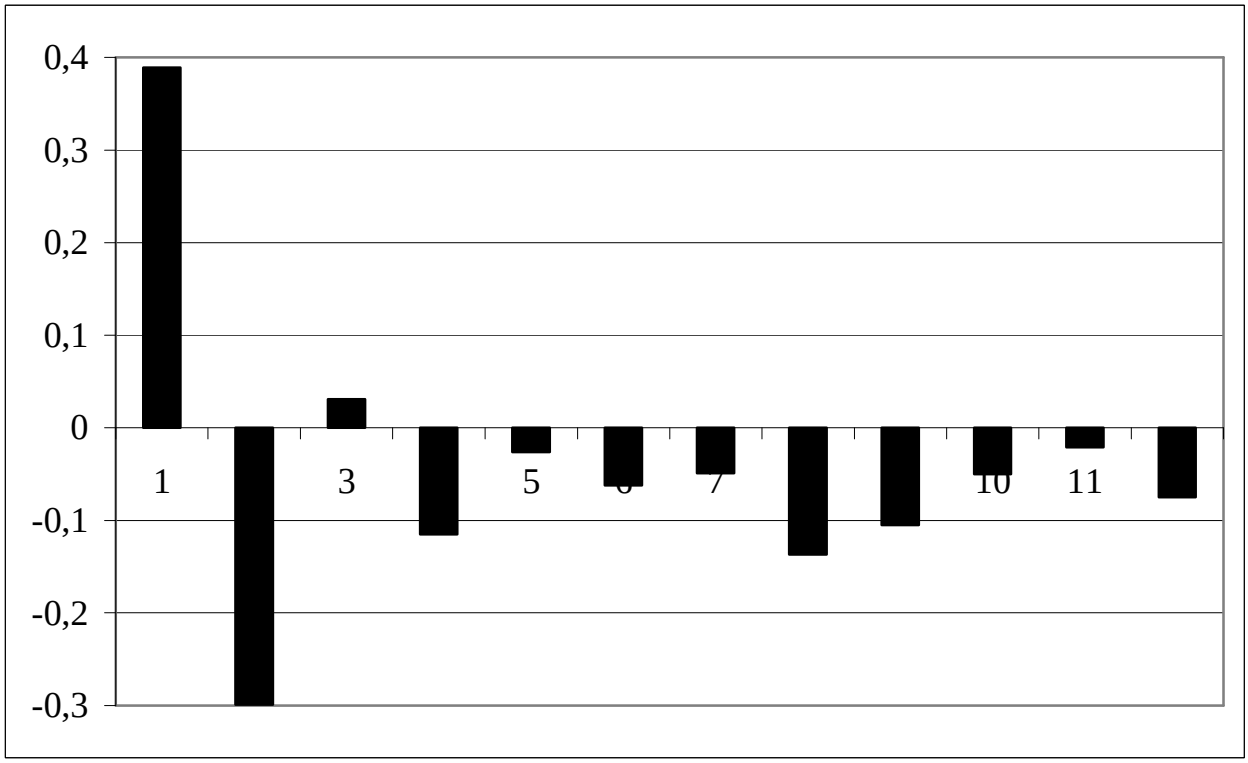


Рис. 7.13. Часткова автокореляційна функція ряду

Порівнявши дані моделей за методикою наведеною при побудові авторегресійних моделей, отримаємо модель, що адекватно описує гетероскедастичність: $\varepsilon^2_k = 0{,}695 + 0{,}492\ \varepsilon^2_{k-1} - 0{,}297\ \varepsilon^2_{k-2}$.

Прогнозування часових рядів

Прогнозувати стаціонарні ряди можна за допомогою отриманої адекватної моделі, а також за допомогою розв'язку різницевого рівняння.

Спосіб отримання функції прогнозування без знаходження розв'язку авторегресійного рівняння

Структура авторегресійного рівняння така, що воно дозволяє виконувати прогнозування на один крок (один період дискретизації вимірів) без додаткових перетворень. Тобто в праву частину необхідно підставити минулі значення змінних і обчислити оцінку прогнозу головної змінної в лівій частині. Але для того щоб знайти оцінку прогнозу на більше число кроків, необхідно застосувати деякі попередні перетворення. Розглянемо деякі можливі підходи до обчислення прогнозованих значень.

Як простий приклад, розглянемо рівняння АР(1):

$$x_k = a_0 + a_1 x_{k-1} + e_k,\ M[e_k] = 0. \qquad (7.16)$$

Збільшимо незалежну змінну, *час*, на одиницю і запишемо рівняння знову:

$$x_{k+1} = a_0 + a_1 x_k + e_{k+1}.$$

Якщо коефіцієнти a_0, a_1 відомі, то можна знайти умовне математичне сподівання на основі відомої інформації до моменту k включно:

$$M_k[x_{k+1}] = M_k[x_{k+1} \mid x_k, x_{k-1}, ..., e_k, e_{k-1}, ...] = a_0 + a_1 M_k[x_k] = a_0 + a_1 x_k \qquad (7.17)$$

оскільки x_k в момент k є відомою константою. Таким чином, рівняння (7.17) дає можливість отримати прогноз на один крок з похибкою прогнозу, що дорівнює e_k.

По аналогії запишемо рівняння (7.16) для моменту $k+2$: $x_{k+2} = a_0 + a_1 x_{k+1} + e_{k+2}$. Знайдемо умовне математичне сподівання $M_k[x_{k+2}] = a_0 + a_1 M_k[x_{k+1}] = a_0 + a_1 M_k[a_0 + a_1 x_k] = a_0 + a_0 a_1 + a_1^2 x_k$. Для наступного моменту часу маємо $M_k[x_{k+3}] = a_0 + a_0 a_1 + a_0 a_1^2 + a_1^3 x_k$. Таким чином, для загального випадку прогнозування на s кроків можна записати $M_S[x_{k+s}] = a_0\left(\sum_{i=0}^{S-1} a_1^i\right) + a_1^S x_k = a_0 \sum_{i=0}^{S-1} a_1^i + a_1^S x_k$. Отримане рівняння називають функцією прогнозування на довільне число кроків. Прогноз представляє собою збіжний процес, якщо $|a_1| < 1$, тобто

$$\lim_{s\to\infty} M_k[x_{k+s}] = \frac{a_0}{1 - a_1}, \qquad (7.18)$$

сума членів геометричної прогресії, знаменником якої є $a_1 -$. Вираз (7.18) свідчить про те, що для стаціонарного процесу АР оцінка умовного прогнозу асимптотично $(s \to \infty)$ збігається до безумовного середнього, якщо $|a_1| < 1$.

Знайдемо похибку прогнозування $f_k(s) = x_{k+s} - M_k[x_{k+s}]$.

Похибка прогнозу на один крок:

$$f_k(1) = x_{k+1} - M_k[x_{k+1}] = a_0 + a_1 x_k + e_{k+1} - a_0 - a_1 x_k = e_{k+1}.$$

Похибка прогнозу на два кроки:

$$f_k(2) = x_{k+2} - M_k[x_{k+2}] = a_0 + a_1[a_0 + a_1 x_k + e_{k+1}] + e_{k+2} - M_k[x_{k+2}] =$$

$$= a_0 + a_0 a_1 + a_1^{\,2} x_k + a_1 e_{k+1} + e_{k+2} - a_0 - a_0 a_1 - a_1^{\,2} x_k = e_{k+2} + a_1 e_{k+1}.$$

Таким чином, можемо записати вираз для похибки для довільного числа кроків прогнозування як $f_k(s) = e_{k+s} + a_1 e_{k+s-1} + a_1^{\,2} e_{k+s-2} + ... + a_1^{\,S-1} e_{k+1}$. Враховуючи те, що $M[f_k(s)] = 0,$ то оцінка прогнозу, є незміщеною. Дисперсія похибки прогнозування $D[f_k(s)] = s^{\,2}[1 + a_1^{\,2} + a_1^{\,4} + a_1^{\,6} + ... + a_1^{\,2(S-1)}]$, тобто дисперсія є функцією s. Асимптотичне значення дисперсії похибки прогнозу для стаціонарного процесу при $|a_1| < 1$ дорівнює $\lim\limits_{S\to\infty} D[f_k(s)] = \dfrac{s^{\,2}}{1 - a_1^{\,2}}$, геометрична прогресія з знаменником $a_1^{\,2}$.

Отримання функції прогнозування за допомогою розв'язку авторегоресійного рівняння

Розглянемо як приклад рівняння АР(1) $x_k = a_0 + a_1 x_{k-1} + e_k,$ $|a_1| < 1,$ де e_k – білий шум з нульовим середнім; x_0 – відома початкова умова. По аналогії з диференційними рівняннями, для однорідного рівняння $x_k - a_1 x_{k-1} = 0$ частковим розв'язком є $A a_1^{\,k}$, де A – довільна константа.

Загальний розв'язок має наступний вигляд: $x_k = \dfrac{a_0}{1 - a_1} + \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_1^{\,i} e_{k-i} + A a_1^{\,i}$ [13]. Для того, щоб знайти значення константи A, скористаємось початковою умовою: $x_0 = \dfrac{a_0}{1 - a_1} + \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_1^{\,i} e_{-i} + A.$ Запишемо розв'язок із врахуванням отриманого значення довільної константи:

$$x_k = \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{\infty} a_1^{\,i} e_{k-i} + \left[x_0 - \frac{a_0}{1 - a_1} - \sum_{i=0}^{\infty} a_1^{\,i} e_{-i} \right] a_1^{\,k}$$

або

$$x_k = \frac{a_0}{1 - a_1} + \sum_{i=0}^{k-1} a_1^{\,i} e_{k-i} + \left[x_0 - \frac{a_0}{1 - a_1} \right] a_1^{\,k}. \qquad (7.19)$$

Запишемо рівняння для оцінки прогнозу відносно нульового моменту часу із врахуванням того, що на момент $k = 0$ відоме значення збурення e_0. Таким чином, функція прогнозу приймає наступний вигляд:

$$M_0[x_k] = \frac{a_0}{1 - a_1} + \left[x_0 - \frac{a_0}{1 - a_1} \right] a_1^{\,k}. \qquad (7.20)$$

Рівняння (7.20) можна розглядати як функцію прогнозування на k кроків наперед на основі інформації, яка є в наявності на момент $k = 0.$

Знайдемо функцію прогнозування на s кроків наперед на основі інформації, яка є в наявності на момент k. Спочатку зробимо заміну індексів в рівнянні (7.20), тобто покладемо $k = s$:

$$M_0[x_s] = \frac{a_0}{1 - a_1} + \left[x_0 - \frac{a_0}{1 - a_1} \right] a_1^{\,s} = \left(\frac{a_0}{1 - a_1} \right)(1 - a_1^{\,s}) + x_0\, a_1^{\,s}.$$

Тепер виконаємо обновлення часового індексу для змінних x і e на k одиниць вперед, тобто зробимо заміну $x_0 = x_k$, $e_0 = e_k$: $M_k[x_{k+s}] = \left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1^{\,s}) + x_k\, a_1^{\,s}$.

Отримане рівняння представляє собою функцію прогнозування на основі відомої інформації про процес на момент k, включно. Використовуючи наведені вище викладки, можна записати функції прогнозування для різного числа кроків наступним чином:

$s=1$: $M_k[x_{k+1}] = a_0 + a_1 x_k$;

$s=2$: $M_k[x_{k+2}] = \left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1^{\,2}) + a_1^{\,2} x_k$;

$s=3$: $M_k[x_{k+3}] = \left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1^{\,3}) + a_1^{\,3} x_k$.

При цьому $\lim\limits_{S\to\infty} M_k[x_{k+s}] = \frac{a_0}{1-a_1}$.

Для АР(1) отримаємо функцію прогнозування у вигляді: $M_k[x_{k+s}] = \left(\frac{a_0}{1-a_1}\right)(1-a_1^{\,s}) + a_1^{\,s} x_k$. По аналогії можна знайти функції прогнозування для моделей іншої структури.

Для роботи з рядами, що містять детермінований тренд, необхідно визначитись:

- чи можливе моделювання та прогнозування ряду безпосередньо за допомогою вихідної моделі ряду;
- чи потрібно попередньо описати та вилучити тренд і моделювати процес як дві окремі складові (тренд та коливальна складова);
- які критерії потрібно застосовувати при визначенні можливості застосування того чи іншого сценарію.

При моделюванні і прогнозуванні рядів з трендом пропонується технологія, наведена на рис. 7.14.

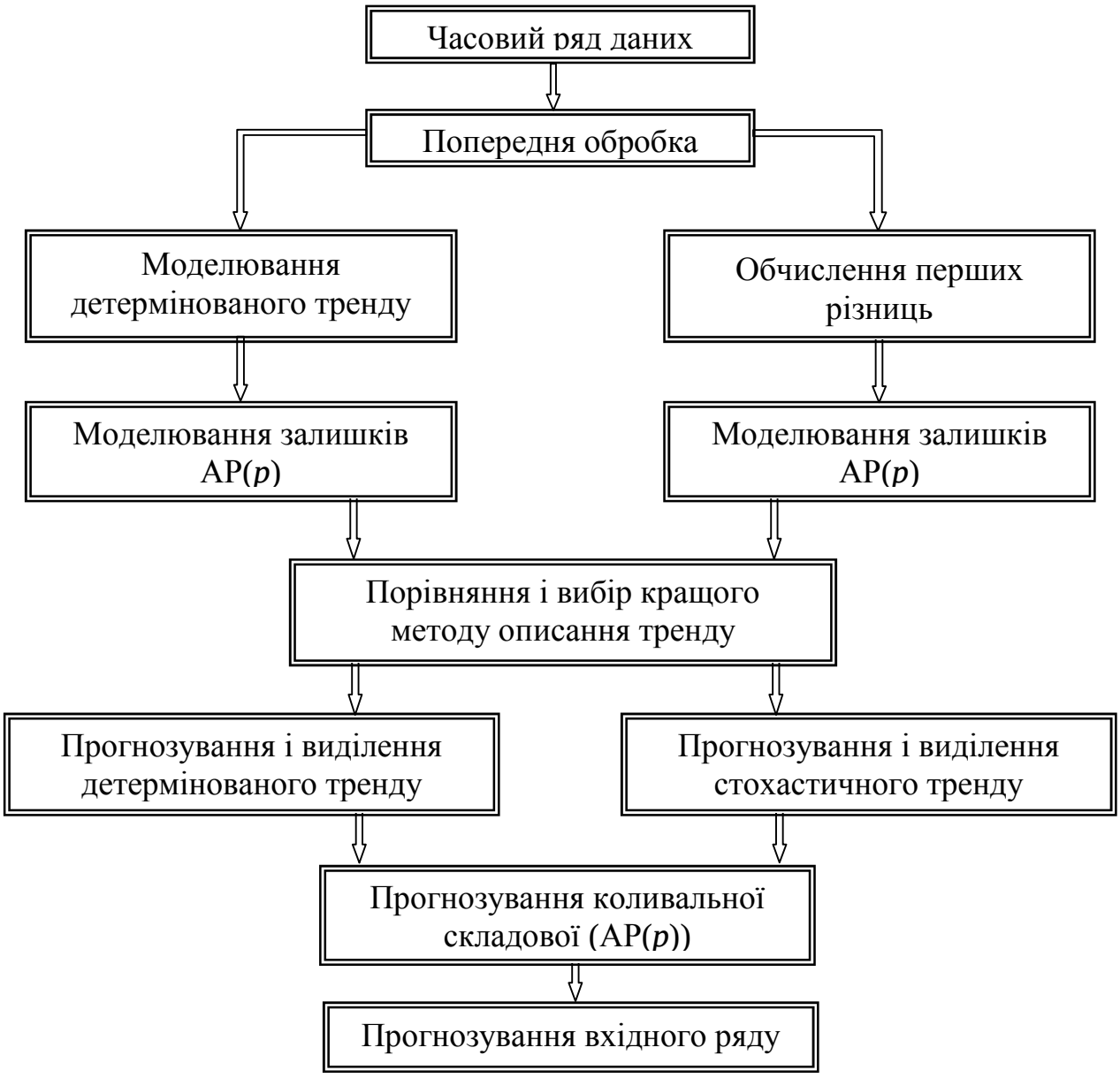
Рис. 7.14. Схема методу моделювання та прогнозування тренду часових рядів

Вибір методу визначається, по-перше, кінцевою метою моделювання, тобто, чи потрібно прогнозувати тренд чи ні. Крім того, вибір методу визначається характером тренду – стохастичні або детерміновані випадки.

Формальні статистики перевірки якості прогнозу

Середньо квадратична похибка RSME: $\text{RSME} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}$.

Середня похибка ME : $\text{ME} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)$.



Середня відсоткова похибка MPE: $\text{MPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \hat{x}_i)}{x_i} \times 100\%$.

Середня відсоткова абсолютна похибка MAPE: $\text{MAPE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \hat{x}_i|}{|x_i|} \times 100\%$.

Коефіцієнт Тейла: $U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n_i - \hat{x}_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2} + \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}_i)^2}}$.

Відношення упередженості $U^M = \frac{(x_i - \hat{x}_i)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}$.

Відношення варіацій $U^S = \frac{(s_{y_i} - s_{\hat{y}_i})^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}$.

Відношення коваріацій $U^C = \frac{2(1-r)(s_{y_i} s_{\hat{y}_i})}{\frac{1}{x}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x}_i)^2}$.

RSME як міра точності, є стандартним відхиленням залишків. ME вимірює упередженість в оцінюванні. За припущенням, середня помилка повинна дорівнювати нулю. Інакше, ми маємо упередженість у оцінюванні. Середня відсоткова похибка MPE забезпечує відносну оцінку зміщеності прогнозу. MAPE є подібною до RSME, але вона є відносною мірою точності моделі.

Коефіцієнт Тейла є дуже важливим індикатором точності моделі і її сумісності. За побудовою, його величина знаходиться між 0 і 1. Якщо U=1, модель не може бути використана для прогнозу. Прогнозовані і реальні ряди є некорельованими. У протилежному випадку, якщо U=0, прогнозовані ряди співпадають з реальними рядами і модель є ідеальною.

Цей коефіцієнт може бути розкладений на суму відношення U^M, відношення варіацій U^S і відношення коваріацій U^C. U^M використовується для перевірки наявності систематичних відхилень середніх для реальних і прогнозних рядів. Або, інакше кажучи, чи модель весь час завищує прогноз Чим менша величина U^M, тим краще. Якщо U^M = 0, то в прогнозованих значеннях відсутня упередженість і модель є якісною.

Відношення варіацій використовується для перевірки того, що модель має достатньо динамічних властивостей для поглинання варіації реальних рядів. Наприклад, модель може забезпечити систематично менші коливання ніж коливання реальних рядів. Аналогічно U^M, менші значення U^S є індикатором меншого зміщення.

Нарешті, відношення коваріацій вимірює, наскільки є корельованими прогнозовані та реальні ряди. Рівність U^C нулю є свідченням того, що прогнозовані і реальні ряди ідеально корелюють. Необхідно зазначити, що $U^C + U^M + U^S = 1$.

Точки перегину (тобто змін напрямку лінії регресії) є також важливими, оскільки деякі моделі можуть мати більшу точність, але можуть погано спрацьовувати при прогнозуванні змін трендів (і, наприклад, циклів). Інші моделі можуть бути менш точними, але можуть мати більш достовірний динамічний характер. Підсумовуючи, можна говорити про компроміс між точністю і динамічними властивостями. На жаль, не існує формального тесту цих властивостей. Проте, візуальна перевірка прогнозованих і реальних рядів швидко визначає, чи включає модель точки перегину.

8. Перевірка відтворюваності або однорідності процесу

Нехай отримано *n* рядів результати вимірювань вихідного параметра:

- одним і тим же методом при роботі з *m* різними однорідними об'єктами, що досліджуються (наприклад, об'єм вибірки починків з партії пряжі дорівнює *n*, а кількість випробувань з кожного починку - m_u u = 1, 2, ..., *n*);
- при вимірюванні вихідного параметра одним методом для *m* різних об'єктів;
- при однакових умовах роботи одного об'єкта *m* різними методами вимірювання вихідної параметра.

Для оцінки відтворюваності (стійкості) роботи одного об'єкта, або однорідності дисперсій вихідного параметра на різних об'єктах, або відтворюваності методик вимірювання порівнюють дисперсії всіх *n* рядів $S_u^2(Y)$, u = 1, 2, ..., *n*. При цьому перевіряється гіпотеза про рівність генеральних дисперсій $S_u^2\{Y\}$, вибірковими оцінками яких є дисперсії.

Перший випадок. Якщо $m_u = const$, то для перевірки однорідності застосовують критерій Кочрена, розрахункове значення якого дорівнює $G_R = \dfrac{S^2_{u_\max}\{Y\}}{\sum_{u=1}^{n} S_u^2\{Y\}}$, де $S^2_{u_\max}\{Y\}$ максимальна вибіркова дисперсія, серед *n* отриманих вибірок.

Задаючись рівнем значущості a= 0,05, тобто довірча ймовірність $p_d = 0.95$, та ступенем волі $f_u = m_u - 1, n$ визначаємо табличне значення критерію Кочрена: $G_T[p_D = 0{,}95, f_u = m_u - 1, n]$. Якщо $G_R > G_T$, то гіпотеза про рівність генеральних дисперсій в *n* рядах вимірювань відхиляється. Після відкидання вибірки з значенням дисперсії $S^2_{u_\max}\{Y\}$, описану вище процедуру слід повторити для *n*-1 рядів вимірів (вибірок). Якщо $G_R < G_T$, то дисперсії однорідні і процес є відтворюваним.

Другий випадок. Якщо дисперсії $S_u^2\{Y\}$ мають різні числа ступенів волі, наприклад, із-за неоднакового числа повторних дослідів при різних рівнях факторів, то для перевірки однорідності дисперсій використовується наближений критерій Бартлета, розрахункове значення якого визначається за формулою $B_R = \frac{2{,}303}{C}[f \cdot \lg \bar{S}^2\{Y\} - \sum_{u=1}^{n} f_u \cdot \lg S_u^2\{Y\}]$ де $f = \sum_{u=1}^{n} f_u$, $f_u = m - 1$, $\bar{S}_u^2(Y) = \frac{1}{f} \cdot \sum_{u=1}^{n} f_u \cdot S_u^2\{Y\}$, $C = 1 + \frac{1}{3(n-1)} \cdot (\sum_{u=1}^{n} \frac{1}{f_u} - \frac{1}{f})$.

Величина B_R розподілена як χ^2 - критерій з числом ступенів свободи n-1. Якщо $B_R < B_T = \chi^2$ [p_D; $f = n - 1$], то це свідчить про відсутність значущого розходження між дисперсіями $S_u^2\{Y\}$, тобто про їх однорідності. Якщо випадкові величини Y_u не мають нормального розподілу, то застосовувати критерій Бартлета не рекомендується, так як він отриманий за умови нормального розподілу цих величин.

Приклад

Нехай проведено вибірку з партії пряжі в кількості п’яти починків (m = 5) і з кожного починка проведено десять випробувань (n = 10) для визначення витривалості напівовняної пряжі (В, цикли) лінійною густиною 22 текс х 2 на пульсаторі ПН-5. Отримані значення наведені в таблиці:

28	17	62	1	69	3	3	69,5	71	85
66	3	11	1	17	70	61	2	28	11
10	56	107	120	73	16	8	65	63	7
12	34	4	79	7	10	11	110	111	116
2,3	4	22	73	12	7	11	11	34	30

Необхідно перевірити відтворюваність проведених експериментів.

Оскільки кількість випробовувань для кожного починку однакова, можливо застосувати критерій Кочрена. Для цього знайдемо вибіркові дисперсії для кожної серії: $S_1^2 = 1122{,}892$; $S_2^2 = 779{,}556$; $S_3^2 = 1712{,}722$; $S_4^2 = 2366{,}711$; $S_5^2 = 452{,}147$. $\sum_{i=1}^{5} S_i^2 = 6434{,}027$; $S_{\max}^2 = 2366{,}711$, G_R=2366,711/6434,027=0,368. Задаючись рівнем значущості a= 0,05 або $p_d = 0.95$, з таблиці знаходимо $G_T[p_D = 0{,}95, f_u = 10 - 1{,}5] = 0{,}4241$. Отже оскільки $G_R < G_T$ гіпотеза про відтворюємість досліджень приймається.

Приклад

Нехай проведено вибірку з партії пряжі в кількості п’яти починків (m = 5) і з кожного починка проведено не однакову кількість випробувань для визначення циклічної деформації ($Е_{ц.д.}$,%) напівовняної пряжі лінійною густиною 22 текс х 2 на пульсаторі ПН-5. Отримані значення наведені в таблиці:

1	2	1	5	2					
1	3	1	3	2	2				
15	15	4	2	1	14	2	0,7	0,3	
0,3	0,8	2	0,6	0,5	0,3	2	0,7	0,5	0,3
2	0,2	0,2	2	2,5	3	0,3	0,5	2,5	3

Необхідно перевірити коректність проведених експериментів, тобто їх відтворюваність.

Оскільки кількість випробовувань для кожного починку не однакова, необхідно застосувати критерій Бартлета.

$f = \sum_{u=1}^{n} f_u$ =5+6+9+10+10=40, $f_u = m - 1$ отже f_1=4, f_1=5, f_1=8, f_1=9, f_1=9;

$S_1^2 = 2{,}7$; $S_2^2 = 0{,}8$; $S_3^2 = 43{,}448$; $S_4^2 = 0{,}429$; $S_5^2 = 1{,}408$; $\bar{S}_u^2(Y) = \frac{1}{f} \cdot \sum_{u=1}^{n} f_u \cdot S_u^2\{Y\}$ =9,473;

$C = 1 + \frac{1}{3(n-1)} \cdot (\sum_{u=1}^{n} \frac{1}{f_u} - \frac{1}{f})$ =1,064; $B_R = \frac{2{,}303}{C}[f \cdot \lg \bar{S}^2\{Y\} - \sum_{u=1}^{n} f_u \cdot \lg S_u^2\{Y\}]$ =57,740.

Квантиль χ^2 [0,95; f = 4]=9,488. Отже $B_R > B_T$, звідси маємо, що гіпотеза про відтворюваність експерименту відхиляється.

9. **Оцінювання невизначеності вимірювання результатів кількісних вимірювань**

Основою статистичних досліджень є виміри тобто метрологічні дослідження. В останні роки в теоретичній та практичній метрології виникають зміни, які пов’язані з введенням, в першу чергу, поняття «невизначеність» для оцінювання достовірності результатів вимірювань та засобів вимірювання. Поряд з цим при проведенні деяких метрологічних робіт зберігається використання поняття «похибка». Така подвійність оцінки результатів вимірювань зумовлює досить повільне впровадження невизначеності в метрологічну практику України.

В різних країнах світу та міжнародних метрологічних організаціях використовують поняття невизначеність. Фірми з виготовлення засобів вимірювання також переходять на їх нормування з використанням невизначеності.

Проаналізуємо концепції похибки та невизначеності для кращого розуміння різниці та подібного в цих поняттях. Для опису вимірювання в концепції похибки істинне значення вимірюваної величини вважається унікальним але практично невідомим. В концепції невизначеності вважається, що в наслідок належного визначення вимірюваної величини недостатньо певної кількості факторів (деталей). Тоді не існує єдиного значення величини, а існує сукупність істинних значень, адекватних визначенню величини, однак ця сукупність значень практично невідома. Поряд із зазначеним можна обходитись без поняття істинного значення величини шляхом використання поняття метрологічної сумісності результатів вимірювання для оцінки їх обґрунтованості.

Якщо невизначеність визначення вимірюваної величини нескінченно мала по відношенню до інших складових невизначеності вимірювання, тоді вимірювана величина може розглядатися як така, що має унікальне істинне значення.

Інколи для визначення поняття «умовного значення величини» використовують термін «умовне істинне значення величини», але використання

цього терміну є небажаним. Умовне значення величини інколи є оцінкою істинного значення величини. В загальному сенсі умовне значення величини описується як значення, що асоціюється з достатньо малою прийнятною невизначеністю вимірювання, яка може бути близькою до нуля.

Виходячи із зазначеного термін «невизначеність вимірювання» можна трактувати як параметр, який характеризує розсіювання значень величини, що належать вимірюваній величині на основі використаної інформації.

Таким чином невизначеність вимірювання включає в себе складові, які викликані систематичними впливами. До них відносять:

- складові, які асоціюються з введеними на них поправками;
- складові, які пов'язані з передавальними вимірювальними еталонами значень величини;
- складові, пов'язані з невизначеністю визначення.

Інколи при оцінюванні систематичних впливів поправки не вводяться, а замість них враховують відповідні складові невизначеності. До таких складових можна віднести стандартну невизначеність вимірювання або встановлене їй кратне значення (або півширина довірчого інтервалу з заданою ймовірністю).

Невизначеність вимірювання включає в себе багато складових. Деякі з них можуть оцінюватися невизначеністю вимірювання типу *A* виходячи з статистичного розподілу значень величини, які отримані в серії вимірювань, і можуть бути охарактеризовані стандартними відхиленнями. Інші складові можуть бути оцінені невизначеністю типу *B*, які також можуть характеризуватися стандартними відхиленнями що включають застосування функцій щільності ймовірностей, отриманими на основі експерименту або на іншой інформації.

Вище перераховані види складових невизначеності жорстко не пов'язані з способами розрахунків, визначеними типом *A* або *B*. Таким чином кожен з цих видів невизначеності може містити складові невизначеності типу *A* та типу *B*.

Проаналізуємо особлвості термінів визначення похибки вимірювання. Так «похибка вимірювання» це виміряне значення величини мінус опорне значення величини. Поняття похибки вимірювання може бути використане у випадку коли похибка є відомою (є єдине опорне значення величини або дано умовне значення величини), а також якщо похибка вимірювання є невідомою (вимірювана величина представлена унікальним істинним значенням або сукупністю істинних значень у мізерно малому діапазоні).

«Опорне значення величини» - значення величини, що використовується в якості основи для порівняння із значенням величини такого ж роду. Опорне значення величини може бути істинним значенням величини, яке є невідомим, або умовним значенням величини, яке є відомим. Це значення з відповідною невизначеністю вимірювання зазвичай вказують для матеріалу (сертифікованого опорного матеріалу), устаткування, опорної методики вимірювання та порівняння вимірювальних еталонів.

Таким чином поняття похибки в концепції невизначеності частково збережене, але отримало суттєву зміну. Похибка може бути визначена у тих випадках, коли є визначене значення величини, спираючись на яке можна

обчислити похибку, а також коли опорне значення є умовним значенням величини. У випадку, якщо за опорну величину приймається істинне значення величини, тоді обчислити похибку неможливо.

В концепції невизначеності застосування похибки досить обмежене і може використовуватися тільки при проведенні спеціальних метрологічних робіт (при порівнянні вимірювальних еталонів, визначенні компетентності лабораторії тощо).

В загальному випадку при виконанні звичайних вимірювань, коли опорне значення величини є невідомим, для оцінки вимірюваної величини потрібно використовувати невизначеність. В основі розбіжностей двох концепцій метрології знаходяться різні філософські підходи до вимірювання. Вони полягають в різних тлумаченнях двох основних понять метрології, які стосуються істинного значення вимірюваної величини та результату вимірювання.

Адекватним представленням вимірюваної величини потрібно вважати не величину з унікальним (єдиним) числовим значенням, а величину, яка характеризується набором числових значень, що знаходяться в межах деякого інтервалу. Цей інтервал називають невизначеністю визначення вимірюваної величини і він визначає неповноту врахування деталей (факторів) при опису вимірюваної величини. Невизначеність відповідає вимогам адекватності істинного значення величини його визначенню.

Ціллю вимірювання в концепції невизначеності є визначення інтервалу обґрунтованих значень вимірюваної величини, який базується на припущенні, що при виконанні вимірювань не було припущено помилок.

Таким чином невизначеність визначення вимірюваної величини є мінімальною невизначеністю вимірювання. Цей інтервал, який називається вимірюваним значенням величини, може бути представлений одним з його значень.

Точність вимірювання в концепції невизначеності визначається розміру довірчого інтервалу з встановленою довірчою ймовірністю, яка приймається для вимірюваної величини. Збільшення або зменшення цього інтервалу відповідає різним численним значенням однієї й тієї вимірюваної величини.

Приклад. При вимірюванні розривного навантаження текстильної нитки отримано результат 36±1 сН. З точки зору концепції похибки значення 36 сН є результатом вимірювання, а значення ±1 сН є похибкою. З точки зору концепції невизначеності отримані значення є невід’ємним інтервалом 35-37 сН, який задається для вимірюваної величини.

Оцінювання невизначеності – процес творчий. Усіх факторів, які спричиняють невизначеність вимірювання, врахувати практично неможливо. Тому що, коли вже враховані усі похибки приладів, поправки, впливи зовнішніх факторів і суб’єктивні впливи, невизначеності властивостей речовин, то невизначеності, наприклад, взаємодії молекул речовин, припущення щодо будови текстильного матеріалу, невизначеності, спричинені ще безліччю інших факторів, залишатимуться не врахованими.

Тому, творчість в оцінюванні невизначеності і полягає саме у визначенні межі, на якій вже варто зупинитись. Тобто потрібно не намагатись оцінити усі фактори, а лише необхідні і достатні, які суттєво впливають на результат випробовування (вимірювання).

Оцінювати невизначеність методів випробовування або результатів випробування (вимірювання) повинні фахівці, добре обізнані із об'єктом випробовування, методом (процедурою) випробовування і особливостями застосування засобів вимірювальної техніки (далі – ЗВТ) та інших засобів випробовування.

Окрім того, фахівець, який оцінює невизначеність повинен сумлінно виконувати оцінювання, не приховуючи тих аспектів невизначеності, які він не знає як врахувати.

Основи забезпечення єдності вимірювання. В 2003 Україна приєдналася до «Угоди про взаємне визнання національних еталонів і сертифікатів калібрування та вимірювання, що видаються національними метрологічними інститутами" (CIPM MRA)», що зумовлює потребу у переході до нової системи забезпечення єдності вимірювання [28].

Єдність вимірювань – стан вимірювань, за якого результати вимірювання виражають в узаконених одиницях вимірювання, а характеристики невизначеності (похибок) вимірювання відомі із заданою ймовірністю та не виходять за встановлені межі.

Єдина система забезпечення єдності вимірювання необхідна для забезпечення їхньої придатності до застосування та взаємовизнання результатів вимірювання.

Принципи єдності вимірювання:

1. Результати вимірювань є випадковою величиною;
2. Задачі вимірювання:
   - отримати значення вимірюваної величини;
   - розрахувати характеристики точності результату вимірювання (невизначеність);
   - оцінити характеристику достовірності отриманого результату (рівень довіри. Відповідний термін в теорії похибок – довірча ймовірність).
3. Функція розподілу ймовірностей – є вичерпним описом випадкової величини;
4. Щільність розподілу ймовірностей визначають як похідну від функції розподілу випадкової величини, і вона є наочним поданням розподілу ймовірностей.

Результат вимірювання завжди відрізняється від істинного значення величини, через:

- недосконаліть методу випробовування (вимірювання);
- недоліки ЗВТ;
- взаємодію ЗВТ із об'єктом випробовування;

– суб’єктивні помилки оператора;
– вплив випробувального середовища тощо.

Класифікація невизначеностей

1. За способом оцінювання розрізняють:

– стандартну невизначеність, u – невизначеність результату вимірювання, оцінена за середньоквадратичним відхиленням.

а) стандартну невизначеність типу A, u_A – невизначеність, яка зумовлена дисперсією результатів вимірювання і може бути оцінена статистичними методами.

б) стандартну невизначеність типу B, u_B – невизначеність спричинена різноманітними впливовими факторами і може бути оцінена ймовірнісними методами.

– сумарна невизначеністу – ймовірнісна сума стандартних невизначеностей .

– розширену невизначеність – інтервал навколо результату вимірювання, в межах якого ймовірно розташована більшість розподілу значень, які з достатнім обґрунтуванням можуть бути приписані вимірюваній величині.

2. За джерелом виникнення невизначеність буває:

– методична;
– інструментальна;
– суб’єктивна.

Причини і джерела методичної складової невизначеності результатів випробовування (вимірювання):

– неточності визначення умов випробувального середовища;
– неточності відтворення умов випробовування;
– недосконале врахування впливу зовнішніх факторів, неадекватне їх оцінювання;
– недосконале визначення об’єкту випробовування (вимірювання), його властивостей, неповна ідентифікація вимірювальної величини;
– недосконала реалізація методики випробовування;
– будь-які припущення, нехтування, апроксимація;
– похибки характеристик ЗВТ;
– взаємодія ЗВТ із об’єктом випробовування (вимірювання);
– неточності перевідних коефіцієнтів, констант тощо;
– неточні значення величин, приписані робочим еталонам, стандартним зразкам;
– невідповідність фізичного об’єкта його математичній моделі (порогова невідповідність);
– не виключені систематичні похибки;
– похибки введених поправок.

Примітка. Теорія невизначеності передбачає усунення усі факторів, які можуть спричинити систематичну похибку результату до початку вимірювання або, якщо фізично усунути впливові фактори неможливо, їх усувають математично, за допомогою поправок, з обов’язковим урахування невизначеності введених поправок.

Причини і джерела інструментальної складової невизначеності результатів випробовування (вимірювання):

- основної похибки ЗВТ (похибка за нормальних умов експлуатації);
- додаткової похибки ЗВТ (внаслідок впливу зовнішніх факторів за межами нормальних областей значень);
- похибка, спричинена варіацією показів ЗВТ;
- похибка ЗВТ внаслідок тимчасової нестабільності.

Причини і джерела суб'єктивної складової невизначеності результатів випробовування (вимірювання):

- вплив оператора на ЗВТ та об'єкт випробовування (вимірювання);
- похибка зчитування даних зі шкали аналогового ЗВТ;
- похибка округлення отриманих значень величин;
- неточності реалізації процедур випробовування (вимірювання);
- порушення інструкції з експлуатації ЗВТ;
- помилки під час обробки діаграм, таблиць, побудови графіків;
- помилки під час пересилання (перенесення) даних.

Оцінювання невизначеності.

Оцінюють невизначеність як методи випробовування (вимірювання), так і конкретні результати вимірювання. Оцінка невизначеності, яка характеризує точність методу випробовування (вимірювання) називається апріорною, її визначають:

- під час розробки методики випробовування (вимірювання) з метою регламентування встановленого значення невизначеності в усіх, передбачених методикою, умовах випробовування;
- за відсутності методики або встановленого значення невизначеності – перед випробовуванням (вимірюванням), для оцінки найбільшої можливої невизначеності.

На підставі усієї наявної інформації про причини і джерела невизначеності обчислюють окремі невизначеності за типом В, сумарну стандартну невизначеність та розширену невизначеність. Основою апріорного оцінювання невизначеності є теорія ймовірності, яка дозволяє досліджувати і описувати закони розподілу випадкових величин.

Оцінка невизначеності для конкретних результатів вимірювання є апостеріорною, її визначають безпосередньо після випробовування (вимірювання), за конкретних умов, за визначеною методикою із застосуванням конкретних ЗВТ.

Примітка. Апріорно оцінена невизначеність – найбільша, за найгіршого збігу обставин випробовування, апостеріорна невизначеність результатів конкретного випробовування може бути на порядок меншою.

Оцінювання невизначеності за типом А .

1. Якщо кількість дослідів $n < 10$, u_A не оцінюють. Для $10 \le n < 20$ – якщо закон розподілу ймовірностей невідомий, для оцінювання uA приймають

рівномірний закон. Якщо $n \geq 20$ – закон розподілу ймовірностей визначають апроксимацією експериментальних даних.

2. Для прямого вимірювання результат визначають як середнє арифметичне отриманих значень, тоді невизначеність за типом *A* обчислюють за формулою:

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}}, \qquad (9.1)$$

де x_i – отриманий результат вимірювання; $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ – середнє арифметичне результатів вимірювання; n – кількість проведених вимірювань.

3. Для опосередкованого вимірювання результат визначають за оцінками декількох величин, тоді невизначеність за типом *A* обчислюють для кожної вихідної величини:

– якщо значення величини розподілені за рівномірним законом, за формулою:

$$u_A = \frac{b}{\sqrt{3}} \qquad (9.2)$$

де b – півширина інтервалу (для несиметричного закону розподілу $b = ((b+) + (- b)/2)$.

Якщо значення величини розподілені за нормальним законом, невизначеність обчислюють як середньоквадратичне відхилення, за формулою:

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \qquad (9.3)$$

Якщо дисперсія результатів врахована у невизначеності, то додатково похибку ЗВТ враховувати непотрібно – вона відображена у дисперсії.

Оцінювання невизначеності за типом В

1. Ґрунтуючись на рівнянні залежності вимірюваної величини від вихідних величин складають переліки:

- вимірюваних вихідних величин;
- не вимірюваних впливових вихідних величин;
- введених поправок на відомі систематичні похибки;
- коефіцієнтів і констант;
- додаткових похибок, тощо.

2. Невизначеності усіх вхідних величин оцінюють інтервалами і перетворюють їх у середньоквадратичне відхилення, при цьому закон розподілу їхніх ймовірностей, якщо він невідомий, приймають рівномірним.

Формула перерахування інтервальної оцінки у середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = b/t, \qquad (9.4)$$

де σ – середньоквадратичне відхилення; b – на півширина інтервалу; t – значення функції Лапласа для нормального закону розподілу ймовірностей (або аналог значення функції Лапласа для іншого закону).

Окремі випадки оцінювання невизначеності

1 Невизначеність констант, коефіцієнтів та поправок для констант, коефіцієнтів, а також поправок інтервалами розсіювання є одиниця найменшого розряду їхніх числових значень. Тоді невизначеність обчислюють за формулою:

$$u_B = \frac{q}{2\sqrt{3}}, \qquad (9.5)$$

де q – одиниця найменшого розряду числового значення.

2 Невизначеність зчитування показів з аналогової шкали приладу. Для оцінювання невизначеності зчитування показів з аналогової шкали приймають рівномірний закон розподілу:

$$u_B = \frac{\left(x + \frac{q}{4}\right) - \left(x - \frac{q}{4}\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{q}{4\sqrt{3}}, \qquad (9.6)$$

де x – виміряне значення величини; q – ціна поділки шкали приладу.

Якщо шкала нерівномірна, невизначеність оцінюють окремо для кожного діапазону, для якого визначена ціна поділки.

Похибка округлення. Невизначеність заокруглення залежить від кількості значущих цифр, які залишають.

Правила заокруглення результату вимірювання. Спершу округляють значення розширеної невизначеності результату випробовування (вимірювання). Залишають 1 або 2 значущі цифри, застосовуючи ряд: 0,10; 0,15; 0,20; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5…

Потім округляють числове значення результату вимірювання, при цьому одиниця найменшого розряду повинна відповідати розмірності невизначеності (похибки).

Під час проміжних обчислень залишають на одну значущу цифру більше. Невизначеність округлення визначають аналогічно невизначеності констант, за формулою (9.5).

Сумарна стандартна невизначеність. Якщо величини, що входять у рівняння, мають різні одиниці вимірювання, то безпосередньо сумувати інтервальні оцінки невизначеності не можна, їх необхідно звести до безрозмірних величин – середньоквадратичних відхилень згідно із формулою (9.4), за однакових рівнів довіри $P(\partial)$.

Якщо закон розподілу невідомий, то під час перерахунку інтервальної оцінки в середньоквадратичне відхилення, приймають рівномірний закон, а під час перерахунку середньоквадратичного відхилення в інтервальну оцінку – нормальний закон. Тобто значення функції Лапласа t або його аналогу обирають таким, щоб забезпечити «запас» невизначеності. Якщо закон розподілу відомий, то коефіцієнт для перерахунку приймають згідно з цим законом.

1. Під час вимірювання показників якості текстильних матеріалів сумарну стандартну невизначеність типу A визначають за формулою для некорельованих величин:

$$u_{CA} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_A^2(x_i)}, \qquad (9.7)$$

де $f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_1)$ – залежність вимірюваної величини від вихідних величин (рівняння вимірювання); $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – коефіцієнт впливу (ваговий коефіцієнт), який визначають як часткову похідну рівняння залежності вимірюваної величини за однією з вихідних величин. Коефіцієнт впливу (ваговий коефіцієнт) відображає як зміна даної вихідної величини може впливати на результат вимірювання; $u_A(x_i)$ – стандартна невизначеність за типом A вихідної величини.

2. Сумарну стандартну невизначеність типу B визначають за формулою:

$$u_{CB} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u_B^2(x_i) + u_B^2(x_i)}, \qquad (9.8)$$

де $f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_1)$ – залежність вимірюваної величини від вихідних величин; $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – коефіцієнт впливу (ваговий коефіцієнт), який визначають як часткову похідну рівняння залежності вимірюваної величини за однією з вихідних величин; $u_B(x_i)$ – стандартна невизначеність за типом B величин, що входять у рівняння залежності вимірюваної величини; $u_B(z_i)$ – стандартна невизначеність за типом B величин, що не входять у рівняння залежності вимірюваної величини.

Якщо впливовий фактор не входить у рівняння залежності вимірюваної величини, його враховують у невизначеності, але без урахування коефіцієнту впливу (вагового коефіцієнту).

3. Тоді, сумарна стандартна невизначеність:

$$u_C = \sqrt{u_{CA}^2 + u_{CB}^2}, \qquad (9.9)$$

Розширена невизначеність. Розширену невизначеність визначають за формулою:

$$U = k \cdot u_C, \qquad (9.10)$$

де k – коефіцієнт охоплення, який залежить від заданого рівня довіри $P(\partial)$ і ефективного числа ступенів волі. Порядок визначення ефективного числа ступенів волі викладений у [26].

Для рівня довіри $P(\partial) = 0{,}95$ за нормального закону розподілу ймовірностей коефіцієнт охоплення $k = 1{,}96$, за рівномірного закону розподілу – $k = 1{,}65$.

Особливості оцінювання невизначеності результатів визначення показників якості текстильних матерів. Під час проведення випробовування текстильних матеріалів по визначенню їх показників якості (далі – ПЯ), зважаючи на мету і програму випробовування, вимірюють значення багатьох параметрів.

Усі параметри, які визначають під час визначення ПЯ, є випадковими величинами, тому мають певні характеристики точності – невизначеності.

Випробовування ПЯ та їхніх складових частин є доволі трудомісткими. Під час випробовування визначають велику кількість параметрів, в різних режимах роботи. Невизначеність оцінюють для кожної отриманої точки, кожної виміряної величини, тому під час обробки результатів випробовування бажано застосовувати програмне забезпечення.

Додатки

Додаток 1. Нормована функція Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

(в наведених в таблиці значеннях функції перші 0 і точка опущені)

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	000000	003989	007978	011966	015953	019939	023922	027903	031881	035836
0.1	039828	043796	047758	051717	055670	059618	063559	067195	071424	075345
0.2	079260	083166	087064	090954	094835	098706	102568	106420	110261	114092
0.3	117911	121720	125516	129308	133072	136831	140576	144309	148027	151732
0.4	155422	159097	162757	166402	170031	173645	177242	180822	184386	187933
0.5	191462	194974	198468	201944	205401	208840	212260	215661	219043	222405
0.6	225747	229069	252371	235653	238914	242154	245373	248571	251748	254903
0.7	258036	261148	264228	267505	270350	273375	276373	279350	282305	283236
0.8	288145	291030	293892	296731	299546	305105	305105	307830	310570	313267
0.9	315940	318589	321214	323814	326391	331472	331472	333977	336457	338913

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.0	341345	343752	346136	348495	350830	353141	355428	357690	359929	362143
1.1	364334	366500	368645	370762	372857	374928	376976	379000	381000	382977
1.2	384930	386861	388768	390651	392512	394350	396165	397958	399727	401475
1.3	403200	404902	406582	408241	409877	411492	413085	414657	416207	417736
1.4	419243	420730	422196	423641	425066	426471	427855	429219	430563	431888
1.5	433195	434478	435745	436992	438220	439429	440620	441792	442947	444083
1.6	445201	446301	447384	448443	449497	450829	451543	452540	453321	454486
1.7	455435	456367	457284	458185	459070	459941	460786	461636	462462	463273
1.8	464070	464852	465621	466375	467116	467843	468357	469258	469946	470621
1.9	471283	471933	472571	473197	473810	474412	475002	475581	476148	476705

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	477250	477784	478308	478822	479325	479818	480301	480774	481237	481691
2.1	482156	482571	482997	483414	483823	484222	484614	484997	485371	485738
2.2	486097	486447	486791	487126	487455	487776	488089	488396	488696	488989
2.3	489276	489556	489830	490097	490358	490613	490863	491106	491344	491576
2.4	491802	492024	492240	492451	492656	492857	493058	493244	493431	493613
2.5	493790	493963	494132	494297	494457	494614	494706	494915	495060	495201
2.6	495339	495473	495604	495731	495855	495975	496093	496207	496319	496427
2.7	496555	496636	496736	496835	496928	497020	497110	497197	497282	497365
2.8	497445	497523	497599	497675	497744	497814	497882	497948	498012	498074
2.9	498134	498193	498250	498305	498359	498411	498462	498511	498559	498605

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	498650	498694	498736	498777	498817	498856	498893	498930	498965	498999
3.1	499032	499065	499096	499126	499155	499184	499211	499238	499264	499289
3.2	499313	499336	499359	499381	499402	499423	499443	499462	499481	499499
3.3	499517	499534	499550	499566	499581	499596	499610	499624	499638	499651
3.4	499663	499675	499687	499698	499709	499720	499730	499740	499749	499758
3.5	499767	499776	499784	499792	499800	499807	499815	499822	499828	499835
3.6	499841	499847	499853	499858	499864	499869	499874	499879	499883	499888

3.7	499892	499896	499900	499904	499908	499912	499915	499918	499922	499925
3.8	499928	499931	499933	499936	499938	499941	499943	499946	499948	499950
3.9	499952	499954	499956	499958	499959	499961	499963	499964	499966	499967

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
4.0	498968	498970	498971	498972	498973	498974	498975	498976	498977	498978
4.1	499979	499980	499981	499982	499983	499983	499984	499985	499985	499986
4.2	499987	499987	499988	499988	499989	499989	499990	499990	499991	499991
4.3	499991	499992	499992	499993	499993	499993	499993	499994	499994	499994
4.4	499995	499995	499995	499995	499996	499996	499996	499996	499996	499996
4.5	499997	499997	499997	499997	499997	499997	499997	499998	499998	499998
4.6	499998	499998	499998	499998	499998	499998	499998	499998	499999	499999
4.7	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999
4.8	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999	499999	500000
4.9	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000	500000

Додаток 2. Таблиця квантилів розподілу Стьюдента з n ступенями волі

n	Р і в е н ь		
	0.900	0.950	0.975
1	3.078	6.314	12.706
2	1.886	2.920	4.303
3	1.638	2.353	3.182
4	1.533	2.132	2.776
5	1.476	2.015	2.571
6	1.440	1.943	2.447
7	1.415	1.895	2.365
8	1.397	1.860	2.306
9	1.383	1.833	2.262
10	1.372	1.812	2.228
11	1.363	1.796	2.201
12	1.356	1.782	2.179
13	1.350	1.771	2.160
14	1.345	1.761	2.145
15	1.341	1.753	2.131
16	1.337	1.746	2.120
17	1.333	1.740	2.110
18	1.330	1.734	2.101
19	1.328	1.729	2.093
20	1.325	1.725	2.086
21	1.323	1.721	2.080
22	1.321	1.717	2.074
23	1.319	1.714	2.069
24	1.318	1.711	2.064
25	1.316	1.708	2.060

26	1.315	1.706	2.056
27	1.314	1.703	2.052
28	1.313	1.701	2.048
29	1.311	1.699	2.045
30	1.310	1.697	2.042
40	1.303	1.684	2.021
60	1.296	1.671	2.000
120	1.289	1.668	1.982
нескінч	1.282	1.643	1.960

Додаток 3. Таблиця квантилів розподілу c^2 з n ступенями волі

N	Р і в е н ь					
	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975
1	0.000982	0.00393	0.015	2.71	3.84	5.02
2	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38
3	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35
4	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1
5	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8
6	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4
7	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0
8	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5
9	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0
10	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5
11	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9
12	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3
13	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7
14	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1
15	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5
16	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8
17	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2
18	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5
19	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9
20	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2
21	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5
22	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.6
23	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1
24	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4
25	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6
26	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9
27	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2
28	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5
29	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7
30	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0
35	20.6	22.5	24.8	46.1	49.8	53.2
40	24.4	26.5	29.1	51.8	55.8	59.3
45	28.4	30.6	33.4	57.1	61.7	65.4

50	32.4	34.8	37.7	63.2	67.5	71.4
60	40.5	43.2	46.1	74.4	79.1	83.3
70	48.8	51.7	55.1	85.5	90.5	95.0
75	52.9	56.1	59.8	90.5	96.2	100.8
80	57.2	60.4	67.1	96.6	101.2	106.6
90	65.6	69.1	76.3	107.6	113.1	118.1
100	74.2	77.9	82.4	118.5	124.3	129.0

Додаток 4. Критичні точки статистики Кочрена G_T [P_D=0,95; f = m – 1, n]

N	f													
	Довірча ймовірність 0,95													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5859	0,5598	0,5365	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5441	0,5065	0,4783	0,4564	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4803	0,4447	0,4184	0,3980	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2901	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286	0,1216	0,1160	0,1113	0,0094	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1061	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1032	0,0968	0,0887	0,0827	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Додаток 5. Таблиця квантилів розподілу для F – розподілу Фішера

f_1 \ f_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	2,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2027
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,76	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	4,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,922	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

f_1 \ f_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,79	8,74	8,70	8,66	3,64	8,62	8,59	8,57	3,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	3,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	4,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,225	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	112,	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,69
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,67
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,65
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,64
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,62
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,51
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,39
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,25
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,00
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,71

Додаток 6. Метод максимальної правдоподібності (ММП)

Одним з найважливіших методів оцінювання параметрів імовірнісних розподілів за експериментальними даними є так званий метод або принцип максимальної правдоподібності (метод МП або принцип МП; повне скорочення — ММП або ПМП). Ідея цього методу належить видатному англійському математику і статистику Рональду Фішеру. Нижче наводяться основні положення даного метода.

При формулюванні основного принципу ММП використовується поняття так званої функції правдоподібності, означення якої зараз буде наведено.

Припустимо, що розподіл ймовірностей випадкової величини x залежить від деякого параметра q. Будемо вважати, що вказаний параметр є дійсним вектором: $q = (q_1,q_2,\ldots,q_m)$. Зокрема, якщо розмірність m цього вектора дорівнює 1, то параметр є дійсним числом. Позначимо Q множину можливих значень вектора q. Зауважимо, що у реальних ситуаціях дослідник часто має інформацію щодо множини Q.

Приклад Д6.1. Нехай x є бернуллієвською випадковою величиною, тобто такою, що приймає значення 1 з ймовірністю p і 0 з ймовірністю q, $p + q = 1$. Завдяки останній рівності можна вважати, що невідомим параметром є лише p, так що $q = p$, тобто q є одновимірним параметром ($m = 1$). Множина Q у даному випадку є відрізком $\{0 \le p \le 1\}$.

Приклад Д6.2. Припустимо, що розподіл випадкової величини x є нормальним з (числовими) параметрами m, s. Якщо немає додаткової інформації, то m може апріорно вважатися довільним дійсним числом, а s — довільним невід'ємним (як середньоквадратичне відхилення випадкової величини) числом. Якщо обидва ці параметри є невідомими, то слід покласти $q = (m, s)$, так що m тут дорівнює 2. Очевидно, Q тут являє собою верхню напівплощину $\{(m, s): s > 0\}$ — підмножину декартової площини (m, s).

Для знаходження оцінки $\hat{q}$ невідомого параметра q за ММП вводиться так звана *функція правдоподібності* вибірки. При її визначенні використовуються наступні позначення. Якщо x — дискретна випадкова величина, то вираз $P(x = x; q)$, де x — одне з можливих значень x, позначатиме ймовірність того, що x дорівнює x. При цьому запис q після крапки з комою символізує залежність вказаної ймовірності від значення параметру q. Аналогічно у абсолютно неперервному випадку, тобто за умови існування щільності розподілу, яка залежить від невідомого параметру, позначатимемо цю щільність $f_x(x; q)$.

Означення Д6.3. Нехай $x_1, x_2,\ldots, x_n$ — вибірка значень випадкової величини x. Функцією правдоподібності $L = L(x_1, x_2,\ldots, x_n; q)$ даної вибірки називається функція параметру $q \in Q$, що визначається рівністю

$$L(x_1, x_2,\ldots, x_n; q) = \begin{cases} \prod_{j=1}^{n} P(x = x_j; q) & \text{ó äèñêðåòíîì âèïàäêó} \\ \prod_{j=1}^{n} f_x(x_j; q) & \text{çà ³ñíóâàííÿì ù³ëüíîñò³ ðîçïîä³ëó} \end{cases}.$$

Скорочене позначення функції правдоподібності — $L(\mathbf{x}; q)$. Зауважимо, що надалі, якщо не буде обумовлене протилежне, $L(\mathbf{x}; q)$ *розглядатиметься як функція параметра q при фіксованому* $\mathbf{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Формулювання ММП. Згідно з ММП в якості оцінки $\hat{q}$ невідомого параметра q береться таке значення з множини Q, для якого величина функції правдоподібності $L(\boldsymbol{x}; q)$ є найбільшою.

Обґрунтування принципу МП. Позначимо $X = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ вибірку значень x, що розглядається як набір випадкових величин. Неважко бачити, що у дискретному випадку $L(\boldsymbol{x}; q)$ дорівнює ймовірності $P_q(X = x)$, , тобто ймовірності того, що $X = \boldsymbol{x}$ **(**нижній індекс q підкреслює, що зазначена ймовірність залежить від параметру q). Іншими словами, $L(\boldsymbol{x}; q)$ дорівнює ймовірності одержати саме таку вибірку, що й була одержана в розглядуваних експериментах. Врахування того, частіше зустрічаються більш ймовірні значення, ніж менш ймовірні, веде до прийняття сформульованого вище принципу МП. У абсолютно неперервному випадку міркування аналогічні. Треба лише врахувати, що $L(\boldsymbol{x}; q)$ дорівнює щільності розподілу вектора X, а найбільш ймовірні значення абсолютно неперервної випадкової величини (байдуже, скалярної чи векторної) містяться в околі точки найбільшого значення її щільності розподілу.

Реалізація методу. *Я*кщо $L(\boldsymbol{x}; q)$, $q \in Q$ є диференційовною функцією q, то $\hat{q}$ є розв'язком системи рівнянь

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x};q)}{\partial q_i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,\ m.$$

Ця система має назву системи *рівнянь максимальної правдоподібності* або просто *рівнянь правдоподібності*. Часто буває зручнішим досліджувати на максимум не функцію правдоподібності $L(\boldsymbol{x}; q)$, а так звану логарифмічну функцію правдоподібності $lnL(\boldsymbol{x}; q)$ (в силу монотонності логарифмічної функції максимальні значення $L(\boldsymbol{x}; q)$ і $lnL(\boldsymbol{x}; q)$ приймаються в одних і тих самих точках q). У цьому випадку для пошуку оцінки параметру маємо систему рівнянь

$$\frac{\partial lnL(\boldsymbol{x};q)}{\partial q_i} = 0,\ i = 1,2,\ldots,\ m,$$

які зветься системою логарифмічної максимальної правдоподібності або просто логарифмічної правдоподібності.

Приклад Д6.4. Оцінимо за ММП параметр p бернуллієвської в.в. (приклад Д6.1). Вибірка $x_1, x_2,\ldots, x_n$ складається з одиниць та нулів. Позначимо кількість одиниць k, тоді кількість нулів дорівнює $n - k$. Очевидно, у даному разі $L(\boldsymbol{x}; q) = L(\boldsymbol{x}; p)$ дорівнює $p^{\,k}\, q^{\,n-k}$, тому

$$lnL(\boldsymbol{x}; p) = k\, ln\, p + (n - k)\, ln(1 - p),$$

і рівняння логарифмічної правдоподібності має вигляд

$$\frac{d}{dp}\ lnL(\boldsymbol{x}; p) = 0,$$

$$k / p - (n - k) / (1 - p) = 0,$$

$$k - k\,p - n\,p + k\,p = 0,$$

$$k - n\,p = 0,$$

$$\hat{p} = k / n.$$

Приклад Д6.5. Оцінимо за ММП параметри m, σ нормально розподіленої випадкової величини x (приклад Д6.2). Виходячи з вигляду щільності розподілу x, маємо

$$L(\boldsymbol{x};\, q) = L(\boldsymbol{x};(m,\sigma)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\right)^n \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{(x_j-m)^2}{2s^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\right)^n e^{-\frac{1}{2s^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-m)^2},$$

звідки

$$ln\, L(\boldsymbol{x};\, q) = n\,[ln\frac{1}{\sqrt{2p}} - ln\,\sigma] - \frac{1}{2s^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-m)^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial m}\, ln\, L(\boldsymbol{x};\, q) = \frac{1}{s^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-m);\ \frac{\partial}{\partial s}\, ln\, L(\boldsymbol{x};\, q) = -\frac{n}{s} + \sigma^{-3}\sum_{j=1}^{n}(x_j-m)^2,$$

і логарифмічна система рівнянь ММП набуває вигляду

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(x_j-m) = 0, \\ -n + s^{-2}\sum_{j=1}^{n}(x_j-m)^2 = 0, \end{cases}$$

З першого рівняння маємо, позначивши його розв'язок $\hat{m}$:

$$\hat{m} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Ця величина має *стандартне* позначення $\bar{x}$ і називається *вибірковим середнім*.

З другого рівняння, позначивши відповідний розв'язок $\hat{s}$ знаходимо

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2}\,.$$

Оцінки, що знайдені з ММП, володіють багатьма важливими властивостями, однією з яких є наступна.

Принцип інваріантності для ММП. Нехай g: $Q \to Y \subset R^k$ — деяка функція ($1 \le k \le m$). Тоді якщо $\hat{q}$ — оцінка ММП параметра q, то $g(\hat{q})$ — оцінка за ММП параметра $g(q)$.

Доведення принципу інваріантності тут не наводиться. Зазначений принцип часто буває зручно використовувати для уникнення зайвих викладок. Наприклад, якщо в умовах попереднього прикладу треба оцінити за ММП дисперсію (σ^2), а не середньоквадратичне відхилення (σ), то немає потреби заново складати рівняння ММП: шукана оцінка дорівнює $\hat{s}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})^2$.

Зауваження Д6.6. Встановлено, що за широких умов оцінки, що одержані за МНК, є консистентними, тобто збігаються за ймовірністю або з ймовірністю 1 до оцінюваних параметрів, якщо об'єм вибірки n прямує до нескінченості. (Точні формулювання тут не наводяться). Розв'язано багато питань, що пов'язані з чисельними реалізаціями ММП.

Зауважимо, що ММП можна ефективно застосовувати і навіть у випадках, коли функція правдоподібності не є диференційованою. Наведемо відповідний приклад.

Приклад Д6.7. Нехай x є випадковою величиною, що розподілена рівномірно на проміжку $[q_1, q_2]$, причому граничні значення q_1, q_2 не відомі. Треба оцінити граничні значення і математичне сподівання x за ММП.

Для розв'язання задачі покладемо $q = (q_1,q_2)$. Маємо

$$f_x(x; q) = \begin{cases} \dfrac{1}{q_2 - q_1}, q_1 \le x \le q_2, \\ 0, \text{ для всіх інших } x \end{cases}.$$

Тож позначивши $x_{(1)}$ і $x_{(n)}$ найменше і найбільше значення серед вибіркових значень $x_1, x_2,\ldots, x_n$, одержимо вираз для функції правдоподібності:

$$L(x; q) = h(x_{(1)} - q_1)\, h(q_2 - x_{(n)})\, \frac{1}{(q_2 - q_1)^n}.$$

де $h(x)$ — функція Хевісайда (ця функція визначена на всій дійсній прямій і дорівнює 1 для невід'ємних x і 0 для від'ємних x). Зрозуміло, що ця функція відмінна від 0 лише для тих (q_1,q_2), для яких q_1 лежить не правіше точки $x_{(1)}$, а q_2 — не лівіше точки $x_{(n)}$. При цьому дріб у правій частині останньої рівності приймає максимальне значення, коли різниця $q_2 - q_1$ буде найменшою, тобто $q_1 = x_{(1)}$, $q_2 = x_{(n)}$. При вказаних значеннях q_1, q_2 множник перед дробом у виразі для $L(x; q)$ приймає своє максимальне значення 1. Отже в якості оцінки $\hat{q}$ за ММП одержано

$$\hat{q} = (\hat{q}_1, \hat{q}_2) = (x_{(1)}, x_{(n)}).$$

Для остаточного розв'язання задачі скористаємося принципом інваріантності, згадавши, що для рівномірно розподіленої на відрізку $[q_1, q_2]$ випадкової величини x має місце рівність

$$Mx = (q_1 + q_2)/2.$$

Отже застосувавши згаданий принцип інваріантності, одержимо

$$\hat{M}x = (x_{(1)} + x_{(n)})/2.$$

Звертаємо увагу, що в якості оцінки середнього значення x тут *не пропонується* середнє вибіркове значення.

Зауважимо, що у поданому вище викладі основних положень ММП припускалося, що випадкова величина x представлена не згрупованою вибіркою її значень. Даний метод можна застосовувати і для згрупованих даних. У цій ситуації він часто називається методом *поліноміальної* або *мультиноміальної* правдоподібності. В загальному випадку цей метод полягає в наступному. Розглядається повна група подій A_1, $A_2,\ldots$, A_r з невідомими ймовірностями $p_1 = P(A_1),\ldots, p_r = P(A_r)$. Вибірка даних об'єму n — це абсолютні частоти $m_1,\ldots, m_r$ подій A_1, $A_2,\ldots$, A_r, $m_1+\ldots+ m_r = n$, що були зафіксовані при повторенні ймовірнісного експерименту. Якщо позначити *теоретичні* абсолютні частоти зазначених подій як $M_1, M_2,\ldots,M_r$, то матиме місце рівність

$$P(M_1 = m_1,\ M_2 = m_2,\ldots, M_r = m_r) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2}\ldots p_r^{m_r}$$

(поліноміальний розподіл). Згідно з ММП, в якості оцінки величин $p_1, p_2, \ldots, p_r$ беруться такі значення останніх, при яких права частина щойно наведеної рівності є максимальною. Зауважимо, що при розгляді випадкових величин та їх вибіркових значень під $A_1, A_2,\ldots, A_r$ розуміють події вигляду $\{x \in B_i\}$, $i = 1,\ldots, r$, де $B_1,\ldots,B_r$ — інтервали групування вибіркових даних, що в об'єднанні складають всю дійсну вісь. Існують різні рекомендації щодо вибору таких інтервалів [10, 15 - 17].

Додаток 7. Перевірка статистичних гіпотез методом c^2

Визначення Д 7.1. Прості і складні (складені) статистичні гіпотези.

- Статистична гіпотеза називається *простою*, якщо вона повністю визначає теоретичний розподіл ймовірностей P_0, згідно з яким в даному експерименті з'являються вибіркові значення;
- Статистична гіпотеза називається *складною* або *складеною*, якщо вона не повністю визначає теоретичний розподіл ймовірностей. Так, складна гіпотеза може вказувати на певну параметричну сім'ю розподілів $\{P_q, q \in Q\}$ (Q — параметрична множина, що складається більш ніж з одного елемента).

Приклад Д7.2. Нехай відомо, що x має нормальний розподіл ($x \sim N(\chi,\chi)$), параметри якого m, s невідомі. Нехай m_0, s_0 — задані числа. Тоді

a) гіпотеза $H_0 = \{m = m_0,\ s = s_0\}$ є простою гіпотезою;

b) гіпотези $H_0 = \{m = m_0\}$ і $H_0 = \{s = s_0\}$ є складними гіпотезами.

Приклад Д 7.3. $H_0 = \{x \sim N(\chi,\chi)\}$. Тобто гіпотеза H_0 полягає в тому, що спостережувана випадкова величина x має нормальний розподіл (тут ми знаходимося в ситуації, що суттєво відрізняється від ситуації попереднього прикладу, де нормальність x не підлягала сумніву).

Очевидно, гіпотеза даного прикладу є складною.

Існує багато методів перевірки статистичних гіпотез. Один з найпоширеніших таких методів має назву *критерій c^2 (хі-квадрат)*. Цей критерій дещо по-різному формулюється у випадку простих і у випадку складних гіпотез.

Для простих гіпотез вказаний критерій базується на наступній теоремі, що належить К. Пірсону.

Теорема Д7.4. Нехай n — число незалежних спостережень деякого досліду з повною групою попарно несумісних подій $A_1, A_2,\ldots, A_r$, ймовірності яких дорівнюють $p_1, p_2,\ldots, p_r$ відповідно. Позначимо $m_1, m_2,\ldots, m_r$ кількість спостережень, в яких було зафіксовано події $A_1, A_2,\ldots, A_r$ відповідно. Введемо випадкову величину

$$\chi^2(n) = \chi^2(n; p_1, p_2,\ldots, p_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Тоді при $n \to \infty$ величина $\chi^2(n)$ слабко збігається до випадкової величини, що має розподіл χ^2_{r-1}.

Пояснимо, що під терміном «слабо збігається» тут мається на увазі, що для довільних дійсних чисел $x_1 < x_2$ ймовірність $P(x_1 < \chi^2(n) \le x_2)$ прямує до величини $F_{r-1}^{c^2}(x_2) - F_{r-1}^{c^2}(x_1)$, де $F_{r-1}^{c^2}$ — функція розподілу випадкової величини з розподілом χ^2_{r-1}.

Теорема Д7.4 використовується для перевірки гіпотези про те, що ймовірності $p_1, p_2, \ldots, p_r$ дорівнюють, відповідно, заданим числам $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_r^0$. Дана гіпотеза є простою. Статистикою критерію тут береться величина $\chi^2(n; p_1^0, p_2^0, \ldots, p_r^0)$. При справедливості гіпотези вказана статистика має наближений (асимптотичний) розподіл χ^2_{r-1}. Відповідно критична множина береться правосторонньою з граничною точкою $u_{r-1,\,a}$ — квантилем рівня $1 - a$ розподілу χ^2 з $r - 1$ степенем свободи. Для підвищення точності вимагають, щоб величини n і $m_1, m_2, \ldots, m_r$ були достатньо великими. Звичайні вимоги з даного приводу: $n \ge 50$, $m_i \ge 5$, $i = 1, \ldots, r$.

Для складних гіпотез роль, аналогічну теоремі 7.4, відіграє наступна теорема, що належить Р.Фішеру.

Теорема Д7.5. Нехай n — число незалежних спостережень деякого досліду з повною групою попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_r$, ймовірності яких $p_1, p_2, \ldots, p_r$ відомі з точністю до деякого k-вимірного параметру $q = (q_1, \ldots, q_k)$: $p_1 = p_1(q)$, $p_2 = p_2(q), \ldots, p_r = p_r(q)$. Позначимо $\tilde{q}$ оцінку максимальної правдоподібності для згрупованих вибірок (додаток 6) параметру q. Тоді при виконанні деяких умов регулярності, що накладаються на функції $p_1(q)$, $p_2(q), \ldots, p_r(q)$ [10,11], статистика

$$\tilde{c}^2(n) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i(\tilde{q}))^2}{np_i(\tilde{q})}$$

при $n \to \infty$ слабко збігається до випадкової величини, що має розподіл c^2_{r-k-1}.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_r$ визначені (див. додаток 6), то принцип застосування даного результату до перевірки складних гіпотез вигляду

$$H_0 = \{ p_1 = p_1(q), p_2 = p_2(q), \ldots, p_r = p_r(q) \}$$

є таким самим, що й у випадку розглянутої вище простої гіпотези. Тільки замість статистики $\chi^2(n)$ береться статистика $\tilde{c}^2(n)$, а замість квантиля $u_{r-1,\,a}$ — квантиль $u_{r-k-1,\,a}$. Відповідні умови на n та $m_1, m_2, \ldots, m_r$ наступні: $n \ge 50$, $m_i \ge 7 - 8$, $i = 1, \ldots, r$.

Алфавітний покажчик

А

Абсолютна частота, *33*
Автокореляційна функція, 59
Авторегресійне рівняння, *56*

В

Верхній квартиль, *31*
Вибірка, 29
Випадкова величина, *13*

Г

Гетероскедастичність, *70*
Гістограма, *33*
Гістограма щільностей, *36*
Групування, *32*

Д

Дисперсія, *16*
Довірчий інтервал, *43*
Довірчий інтервал дисперсії, *44*
Довірчий інтервал математичного сподівання, *44*

Е

Емпірична функція розподілу, *35*
Емпіричне правило Юла, *41*

З

Закон великих чисел, *21*

І

Інформаційний критерій Акайке, *62*

Й

ймовірність, 11, 12, 13, 14, 18, 19, 37, 42, 45, 46, 47, 51, 53, 54

К

Квантиль, *42*
Кількісна оцінка об'єму вибірки, *53*
Коваріація, *16*
Коефіцієнт детермінації, *61*
Коефіцієнт кореляції, *16*
Коефіцієнт Тейла, *62*
Комбінації, *11*
Критерій Байеса-Шварца, *62*
Кумулятивна функція розподілу, *35*

М

Математичне сподівання, *15*
Медіана, *31*, *38*
Мода, *38*

Н

Наявність нелінійностей, *58*
Нижній квартиль, *31*
Нормальний закон розподілу, *16*

О

Оцінка дисперсії, *39*
Оцінка математичного сподівання, *39*
Оцінка медіани, *40*
Оцінка моди, *40*

П

Перестановки, *11*
Полігон, *33*
Порядок моделі, *57*
Похибки моделі, *56*
Прогнозування часових рядів, *74*
Процентиль, *42*

Р

Ранг, *31*
Ранжування, *31*
Розмірність моделі, *57*
Розміщенням, *10*
Розподіл C^2, *44*
Розподіл Стьюдента, *44*

С

Середнє квадратичне відхилення, *16*
Статистика Дарбіна-Уотсона, *62*
Статистика Стьюдента, *61*
Статистика Фішера, *62*
Статистичні гіпотези, *45*
Стаціонарна випадкова послідовність, *56*
Стеблина з листям, *30*
Сума квадратів помилок, *61*

Т

Таблиця частот, *30*
Тип збурень, *58*
Тренд, *67*

У

Умови стаціонарності процесу, *58*

Ф

функція Лапласа, *17*
Функція розподілу ймовірностей, *14*
Функція щільності, *14*

Ц

Центральна гранична теорема, *22*

Ч

Час запізнювання, *58*
Часткова автокореляційна функція, 59

Я

Ящик з вусами", *31*

Літературні джерела

1	Теорія ймовірностей та її застосування у задачах легкої промисловості .-К, НМК ВО, 1991.	Краснитський С.М. Хилюк Л.Ф.
2	Методичні вказівки до курсу „Прикладна математика”. Розділ „Статистичний аналіз даних”.-К.:Далпу.,1996	Пилипенки Ю.М. Краснитський С.М. Мацак І.К.
3	Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ЮНИТИ, 2000.	Кремер Н.Ш.
4	Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высш.шк., 1972.	Гмурман В.Е.
5	Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. - К.: Вища шк., 1971.	Скороход А.В.
6	Оперативная идентификация объектов управления. - М.: Энергоиздат, 1982.	Перельман И.И.
7	Применение методов корреляционного и регрессионного анализов к обработке результатов эксперимента. Заводская лаборатория, 1964	Айвазян С.А.
8	Моделирование технологических процессов (в текстильной промышленности): Учебник для вузов. – М.: Легкая и пищевая промышленность. 1984.	Севостьянов А.Г., Севостьянов П.А.
9	Линейная и нелинейная регрессия. – М.: Финансы и статистика, 1981.	Демиденко Е.З.
10	Линейные статистические методы и их применение. – М.: Наука, 1968.	Рао С.
11	«Статистические выводы и связи», перевод с англ. под ред. А. Н. Колмогорова, Москва, 1973	М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт
12	Справочник по прикладной статистике. – М.: Финансы и статистика, том 1 1989.	Под редакцией Э. Ллойда, У.Ледермана.
13	Часові ряди: моделювання та прогнозування. – К.: Екмо, 2003.	Бідюк П.І., Савенков О.І., Баклан І.В.
14	Анализ результатов наблюдений.-М.:Мир, 1981.	Тьюки Дж.
15	Основы прикладной статистики.-М.:Енергоатомиздат, 1983.	Мельник М.
16	Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества.-М.:мир, 1970.	Шторм Р.
17	Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1985.	Новицкий П. В., Зограф И. А.
18	«Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root» / Journal of the American Statistical Association. — 74. — 1979. — p. 427-431.	Dickey D.A. and Fuller W.A.

19	Введение в эконометрику. – М. : Инфра-М, 1999.	К. Доугерти
20	ЭКОНОМЕТРИКА.- М.: Юнити-Дана, 2002.	Н.Ш. Кремер Б.А. Путко
21	Математическая обработка результатов эксперимента. Справочное руководство. – М.: Наука, 1971. – 192 с.	Румшинский Л.З.
22	Математическая статистика и ее применение в текстильной и швейной промышленности. – М.: Легкая индустрия, 1970. – 312 с.	Виноградов Ю.С.
23	Методы и средства исследования механико-технологических процессов текстильной промышленности. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2007. – 648 с.	Севостьянов А.Г.
24	Неопределенность и погрешность, их сходство, различие и употребление в разных метрологических процедурах // Збірник наукових праць. Системи обробки інформації. – вип. 7(56) Невизначеність вимірювання: наукові, нормативні та прикладні аспекти, 2006, С.82-86.	В.П. Чалый
25	Закон України № 113/98-ВР від 11.02.1998 «Про метрологію та метрологічну діяльність» (зі змінами, внесеними згідно із Законом N 762-IV від 15.05.2003, в редакції Закону N 1765-IV від 15.06.2004)	
26	ДСТУ-Н РМГ 43:2006 Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений» (РМГ 43:2001, IDT)	
27	Eurachem/CITAC guide CG 4 «Quantifying Uncertainty in Analytical Measurement» 2nd edition.	
28	Еволюція вимог до метрології // Український метрологічний журнал, 2005, № 3, С. 56-60.	В.В.Паракуда, Б.Д.Колпак, В.П.Чалий
29	Оцінювання невизначеності вимірювання параметрів автомобільних двигунів під час стендового випробовування // Системи обробки інформації. – Харків. – 2008.	В.В. Мержиєвська
30	Теория неопределенности в измерениях. Учеб. пособие: Харьков, Консум, 2002 – 256 с.	Захаров И.П., Кукуш В.Д.
31	РМГ 29-99* ГСП. Метрология. Основные термины и определения.	