УДК 517.Б

ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛ ЕЙЛЕРА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Студ. Поліщук М.М. гр. БІТ-18
Науковий керівник проф. Дубко В.О.
Київський національний університет технологій та дизайну

Метою даної роботи являється отримання и обґрунтування одних і тих же математичних співвідношень різними способами, методами, схем. В даній роботі демонструється, як за допомогою формул Ейлера можна інтегрувати спеціальні вирази, які входять як обов'язкові до курсу математичного аналізу, а саме:

$$\int (\sin bx)^m \, dx, \int (\cos bx)^m \, dx, \int (\sin bx)^m (\cos bx)^n \, dx,$$

$$\int e^{ax} (\sin bx)^m (\cos bx)^n \, dx$$

Формули Ейлера дають можливість уніфікувати інтегрування певного класу функцій, шляхом зведення до інтегрування експонент.

Продемонструємо це на прикладах.

Спочатку за допомогою Метода інтегрування шляхом заміни змінної обчислимо такі інтеграли:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx, \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Якщо до них застосувати інтегрування по частинам (в обох випадках взявши, скажімо, $dv = e^{ax} dx, v = \frac{1}{a} e^{ax}$), то отримаємо:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx \, dx,$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

Таким чином, кожний із цих інтегралів виявився вираженим інший.

Однак якщо в першу формулу підставити вираз другого інтеграла з другої формули, то прийдемо до рівняння відносно першого інтеграла, із якого він і визначиться:

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

Аналогічно, знаходимо і другий інтеграл:

$$\int e^{ax} sin\, bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

Розглянемо тепер застосування формул Ейлера. Ось їх загальний вид:

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \\ \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

Оскільки $e^{ibx} = cosbx + isinbx$, де $i^2 = -1$ – уявна одиниця, то маємо:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \int e^{ax} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} dx = \int (\frac{e^{ax+ix}}{2} + \frac{e^{ax-ix}}{2}) dx =$$

$$= \int \frac{e^{ax+ix}}{2} dx + \int \frac{e^{ax-ix}}{2} dx = \frac{e^{(a+i)x}}{2(a+i)} + \frac{e^{(a-i)x}}{2(a-i)} =$$

Відповідно,

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \int e^{ax} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} dx = \int (\frac{e^{ax+ix}}{2i} - \frac{e^{ax-ix}}{2i}) dx =$$

$$= \int \frac{e^{ax+ix}}{2i} dx - \int \frac{e^{ax-ix}}{2i} dx = \frac{ie^{(a+i)x}}{2(a+i)} - \frac{ie^{(a-i)x}}{2(a-i)}.$$

Повертаючись до sin x та cos x, отримаємо:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C$$

Підсумовуючи, можна додати, що для обчислення таких інтегралів можна було б обійтися без комплексних чисел, однак для цього нам довелося інтегрувати частинами двічі, потім отримали формулу зведення, звідки і дізналися відповідь.

При обчисленні цього ж інтегралу за формулою Ейлера, ми зробили це швидше, компактніше, а також деякою мірою легше.

Використана література

1. Н.М. Гюнтер, Р.О. Кузьмін, Збірник завдань з вищої математики, 13 видання, «Лань», 2003. 816 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник – К.:Вища шк.,1993. 648 с.