МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ТЕХНОЛОГІЙ ТА ДИЗАЙНУ

Ю. А. Ковальов, С. А. Плешко, М. М. Рубанка, Р. В. Хиневич

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ.
Точка. Пряма. Площина

Інтерактивний навчальний посібник

Рекомендовано Вченою радою Київського національного
університету технологій та дизайну для студентів денної,
заочної та заочно-дистанційної форм навчання
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за
спеціальностями: 105 Прикладна фізика та наноматеріали,
131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування,
182 Технології легкої промисловості
факультетів МКТ, ММ та інституту ІІТ

К и ї в
2 0 2 3

УДК [744+004.92] (075.8)
К 58

Рецензенти:

Хімічева Г. І. – д-р техн. наук, проф., проф. кафедри механічної інженерії Київського національного університету технологій та дизайну;

Щербань Ю. Ю. – д-р техн. наук, проф., академік міжнародної академії інформатизації, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, заступник директора з навчально-методичної роботи Київського фахового коледжу прикладних наук;

Поліщук О. С. – д-р техн. наук, проф., зав. кафедри машин і апаратів, електромеханічних та енергетичних систем Хмельницького національного університету.

Рекомендовано Вченою радою Київського національного
університету технологій та дизайну як навчальний посібник
для студентів денної, заочної та заочно-дистанційної форм першого
(бакалаврського) рівня вищої освіти, які навчаються за спеціальностями:
105 Прикладна фізика та наноматеріали, 131 Прикладна механіка,
133 Галузеве машинобудування, 182 Технології легкої промисловості
факультетів МКТ, ММ та інституту ІІТ
(протокол № 11 від 30 червня 2023)

К 58 Нарисна геометрія. Точка. Пряма. Площина : інтерактивний навч. посіб. / Ю. А. Ковальов, С. А. Плешко, М. М. Рубанка, Р. В. Хиневич. Київ : КНУТД, 2023. 148 с.

ISBN 978-617-7763-21-4

У навчальному посібнику розглядаються методи проекціювання окремих елементів та просторових об’єктів на площини проекцій: точок, прямих, площин та деяких поверхонь. Наведені загальні схеми розв’язання позиційних та метричних задач основними способами та способами перетворення.

Розглянуті задачі на перетин поверхонь проекціювальною площиною. Наведені способи побудови розгорток.

УДК [744+004.92] (075.8)

ISBN 978-617-7763-21-4

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

В науці, техніці і мистецтві користуються зображеннями у вигляді креслень (креслеників), ескізів, рисунків, фотознімків. Найбільше значення для науки і техніки, мають креслення (кресленики), які є зручним та незамінним засобом збереження геометричної інформації.

В технічних закладах вищої освіти *нарисну геометрію* розглядають як граматику креслення. Цю граматику повинен добре знати кожен інженер – технічний фахівець. Крім того, прикладна геометрія розвиває здібності конструкторського мислення, кращого розуміння питань проектування, технології, розрахунку, економіки, експлуатації тощо.

Нарисна геометрія є одним з розділів геометрії, в якому просторові форми, з їх геометричними закономірностями, вивчають по їх зображеннях на площині.

Метою нарисної геометрії є розробка методів відображення просторових форм предметів та розкриття їх геометричних властивостей за допомогою плоских зображень.

Нарисна геометрія *вивчає:*

а) задачі побудови на площині просторових форм;

б) способи рішення на площині задач, які відносять до просторових форм.

Нарисна геометрія є однією з головних дисциплін в підготовці кваліфікованого інженера.

Навчальний посібник розрахований на активну роботу студента в режимі виконання розрахунково-графічних робіт та самопідготовки до екзамену (заліку) з нарисної геометрії.

Для покращення засвоєння матеріалу, в кінці кожної теми наведені QR-коди, які дозволяють за посиланням переходити на відео-лекцію теми, яка розглядається в даному розділі.

Посібник вказує в якій послідовності доцільно вивчати предмет, на що треба звернути особливу увагу, які підручники і навчальні посібники треба використовувати для подальшого вивчення дисципліни.

Кожну тему треба опрацьовувати. Опрацювання полягає не тільки у вивченні теоретичного матеріалу, але і у виконанні графічних задач, які є ілюстрацією до теми. Умова задачі може бути така сама, а може бути іншою.

Кожна тема завершується „*Запитаннями та завданнями для самоконтролю*”. На кожне запитання треба відповісти. А завдання графічно розв’язати на окремому аркуші. Все це допоможе краще вивчити дану тему та засвоїти практичні навички у виконанні графічних задач.

Для зручності користування додатковою літературою, в кінці кожної лекції є розділ „Література по темі”.

Навчальний посібник призначений для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти факультетів МКТ, ММ та інституту ІІТ Київського національного університету технологій та дизайну.

По закінченню вивчення курсу нарисної геометрії студент *повинен знати:*

– проекційний метод побудови зображень геометричних фігур;

– позиційні і метричні властивості проекцій пар елементарних геометричних фігур;

– класифікацію і алгоритми рішення позиційних задач;

– сутність способів рішення позиційних задач за допомогою: допоміжних проекціювальних площин; допоміжних січних концентричних та ексцентричних сфер; допоміжного косокутного проекціювання (паралельного та центрального);

– класифікацію і алгоритми рішення метричних задач;

– сутність способів перетворення комплексного креслення: введення нових площин проекцій; плоско паралельне переміщення; обернення навколо висей, які перпендикулярні або паралельні одній із площин проекцій;

– принципи побудови перетину поверхонь площиною та прямою;

– принципи побудови ліній взаємного перетину поверхонь;

– принципи побудови розгорток поверхонь;

– теоретичні основи та правила побудови стандартних аксонометричних проекцій.

Студент повинен *вміти*:

– будувати зображення основних геометричних фігур в ортогональних і аксонометричних проекціях;

– уявляти форму і положення геометричних фігур в просторі по заданим проекційним зображенням;

– будувати зображення об’єкта, його характерні точки, по декартовим координатам;

– виконувати побудову лінії перетину граних та кривих поверхонь площиною, а також лінії перетину поверхонь між собою;

– будувати проекції точок перетину прямої з багатогранниками та кривими поверхнями;

– розв’язувати позиційні задачі різними способами;

– розв’язувати метричні задачі без перетворення комплексного креслення, а також, використовуючи способи перетворення комплексного креслення;

– будувати розгортки многогранних та кривих поверхонь;

– розв’язувати практичні задачі пов’язані з фахом.

Колектив авторів висловлює глибоку вдячність завідуючому кафедри механічної інженерії Київського національного університету технологій та дизайну ***Волянику Олексію Юрійовичу***.

Прийняті умовні позначення

$П_1$, $П_2$, $П_3$ – головні площини проекцій: горизонтальна, фронтальна і профільна

$П_4$, $П_5$, ... – додаткові площини проекцій

К– бісекторна площина четвертої та другої чвертей (квадрантів) простору

П′ – площина проекцій при побудові аксонометричних зображень

x, y, z– координати осі: абсцис, ординат, аплікат

x_{12} – вісь проекцій – перетин горизонтальної та фронтальної площин проекцій

z_{23} – вісь проекцій – перетин фронтальної та профільної площин проекцій

y_1 – вісь проекцій,яка належить горизонтальній площині проекцій

x′, y′, z′– аксонометричні осі

x_{14} – нова вісь проекцій при перетворенні кресленика – заміна площини проекцій $П_2$ на площину $П_4$

O – початок ортогональних координат

O′ – початок аксонометричних координат

A, B, C, D, …– позначення точок в просторі – великі літери латинської абетки

1,2, ,3, ... – арабські цифри

I, II, III, IV,... – римські цифри

a, b, c, d, ...– лінії в просторі (малі літери латинської абетки)

h– горизонтальна пряма

f – фронтальна пряма

p – профільна пряма

α, β, γ – кути

Г, Δ, Θ, I, Λ, Ξ, Σ– площини, поверхні – великі літери грецької абетки

H – горизонтальний слід прямої

F– фронтальний слід прямої

h^{o} – горизонтальний слід площини

f^{o} – фронтальний слід площини

Проекції геометричних образів позначаються тими ж літерами (або цифрами) з показом індексу:

A_1, B_1, C_1, ... – горизонтальні проекції точок

A_2, B_2, C_2, ... – фронтальні проекції точок

A_3, B_3, C_3, ... – профільні проекції точок

A_4, A_5, B_4, B_5, ... – проекції точок на додаткових площинах проекцій

a_1, b_1, c_1, ... – горизонтальні проекції ліній

a_2, b_2, c_2.. – фронтальні проекції ліній

Σ_1, Δ_1 – горизонтальні проекції площин, поверхонь

Σ_2, Δ_2... – фронтальні проекції площин, поверхонь

A'_1, A'_2, ...a'_1, a'_2,... – вторинні проекції об’єктів проекціювання

$\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ – проекції точок після перетворення кресленика обертанням або суміщенням

Σ_1, Σ_2 – горизонтальний або фронтальний сліди площини

Позначення головних операцій

// – знак паралельності

– знак не паралельності

$\perp$ – знак перпендикулярності

$\cap$– знак перетину

$\equiv$ – знак збігання двох геометричних образів або їх проекцій

$\in$ – знак належності. Наприклад: $A \in \Theta$ – точка A належить площині Θ. $A \in l$ – точка A належить лінії l

$\angle$ – плоскі або двогранні кути. Прямий кут позначають дугою з точкою в середині цього сектора – ⊾.

ЧАСТИНА І. ОРТОГОНАЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ

ЛЕКЦІЯ 1

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ. УТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ

План лекції:

1.1.Нарисна геометрія як предмет: цілі і задачі.
1.2.Короткий історичний огляд.
1.3.Утворення проекцій.
1.4.Види та сутність проекціювання.
1.5.Проекція точки.
1.6.Проекції точки, яка розташована в різних квадрантах.

1.1. Нарисна геометрія як предмет: цілі і задачі

Нарисна геометрія є одним з розділів геометрії, в якому просторові форми предметів і відповідні геометричні закономірності вивчаються за допомогою зображень на площині.

Нарисна геометрія – одна з фундаментальних загально технічних дисциплін, яка покладена в основу інженерної освіти. Виходячи з визначення предмета, зміст курсу зводиться до рішення наступних задач:

а) розробка способів побудови зображень просторових фігур на площині;

б) вивчення способів розв’язання і дослідження просторових задач за допомогою зображень на площині.

Ці зображення повинні дозволяти повно і точно відображати і досліджувати геометричні властивості об’єкта та його частин, що висуває низку умов. Найбільш суттєві з них з:

1. кресленик має бути наочним, тобто давати просторову уяву про зображувальний предмет;
2. кресленик має бути оборотним, тобто щоб по ньому можна було відновлювати форму та розміри об’єкту;
3. кресленик повинен бути достатньо простим в графічному виконанні;
4. всі графічні операції, які виконуються на кресленику, мають давати прості рішення.

Треба враховувати, що перехід від просторових предметів, які спостерігає студент, до їх зображення на площині, а потім уміння користуватися такими зображеннями взамін самих предметів, нерідко викликає на початку великі труднощі у студентів. Ці труднощі виникають від недостатнього розвитку в декого з них просторового уявлення та просторової уяви.

Тому *нарисна геометрія* є саме тією науковою дисципліною, яка допомагає розвитку просторових уявлень, які необхідні не тільки в техніці, але і взагалі у практичному житті людини.

На початку вивчення нарисної геометрії корисно звертатися до моделювання відповідних геометричних форм. В подальшому задача викладання полягає в тому, щоб студенти звикли виконувати операції з просторовими фігурами га їх зображення, не уживаючи моделі.

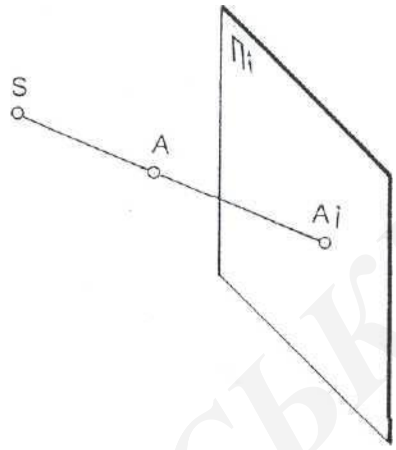
1.2. Короткий історичний огляд

Відомості та заходи побудов, які обумовлені потребою в плоских зображеннях просторових форм, накопичувалися поступово з стародавніх часів. З розвитком техніки першорядне значення приймає питання про застосування метода, який забезпечує точність та зручність вимірювання зображень. Тобто дає можливість точно встановити місце кожної точки зображення відносно інших точок або площин, та використовуючи прості заходи визначити розміри відрізків ліній та фігур. Поступове накопичення окремих правил та прийомів побудов таких зображень були зведені в систему та розвинуті в праці французького вченого Гаспара Монжа, яка була видана в 1799 році під назвою „Géométrie déscripitive”.

В свій час велику наукову та науко-методичну роботу виконував професор КНУБА В.Є. Михайленко.

1.3. Утворення проекцій

Зображення на кресленику повинні забезпечувати виразність, точність та зручність вимірювання зображень предметів на площині.

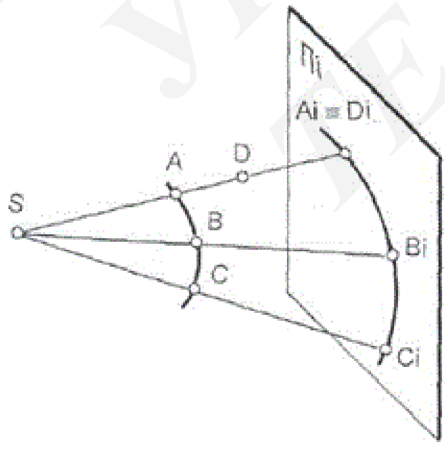


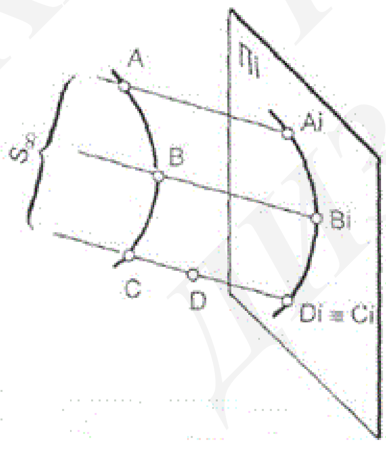
Зображення, які задовольняють цим вимогам, виконуються на основі метода проекціювання, апарат якого складається з *площини проекцій* Π_i, на якій знаходяться проекції (зображення) та проекціювальний промінь SA (рис. 1.1.), який проходить через точку A і перетинає площину проекцій Π_i. Точка перетину проекціювального променю з площиною проекцій, визначає проекцію геометричної фігури на площині проекцій – точка A_i є проекцією точки A на площині проекцій Π_i.

Рис. 1.1

1.4. Сутність та види проекціювання

Якщо проекціювальні промені проходять через одну точку S (рис. 1.2), яка називається центром проекціювання, то метод називається *центральним* або *конічним*; якщо центром проекціювання буде нескінченно віддалена точка, проекціювальні промені будуть паралельними (рис.1.3), то цей метод називається *паралельним* або *циліндричним*. Якщо напрям паралельного проекціювання буде перпендикулярним до площини проекцій Π_i (рис 1.4), то метод називається *ортогональним* (*прямокутним*). Якщо напрям паралельного проекціювання буде під кутом до площини проекцій, то цей метод називається *косокутним*.





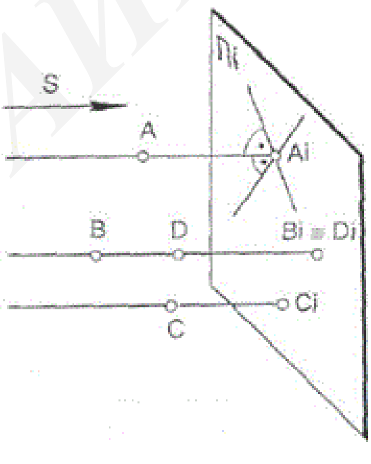


Рис. 1.2 **Рис. 1.3** **Рис. 1.4**

З рис. 1.2, 1.3, 1.4 видно, що одній проекції точки можуть відповідати нескінчена кількість точок простору, відповідно, отримані проекції не *оборотні* (не однозначні). Лише в тому випадку, коли будуть дані дві проекції точки з двох центрів проекціювання *S, T* (рис. 1.5) або з двох напрямків проекціювання *S* і *T* (рис.1.6.), ці проекції будуть оборотними і, при уживаному апарату проекціювання, можна буде відтворити тільки одну точку в просторі.

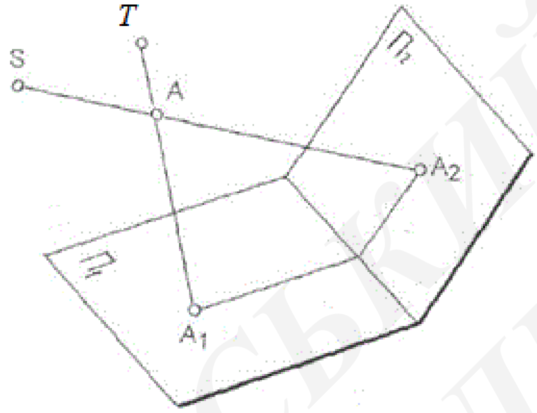


Рис. 1.5

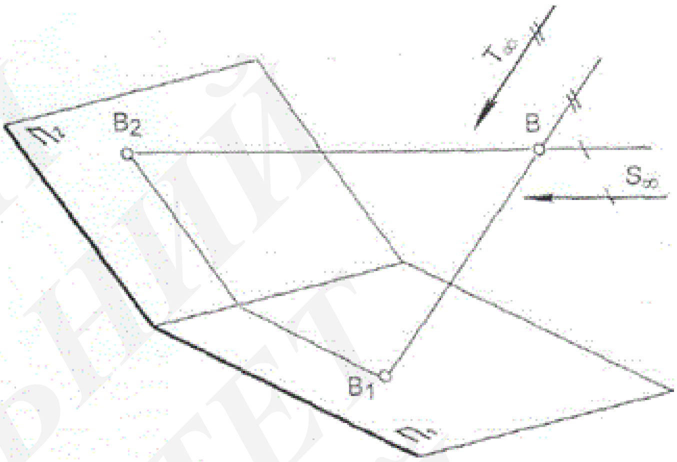


Рис. 1.6

Коли відомий апарат проекціювання, тобто дві площини проекцій та два центра проекціювання *S* та *T* (див. рис. 1.5) або два напрямки проекціювання S_∞ та T_∞(див. рис. 1.6), можна розв'язати оборотну задачу. Для цього проводять два проекціювальні промені через точки A_1 і A_2 (рис.1.5) в центри проекціювання *S* і *T* або паралельно напрямкам проекціювання S_∞ і T_∞ (рис. 1.6). Перетин двох променів однозначно визначить шукані точки *A* (рис.1.5) і *B* (рис. 1.6). Таким чином, ми можемо рішити оборотну задачу.

Залежно від положення площини та напрямків проекціювання (центральне, паралельне) можна діставати різні проекціювальні системи. Найбільш поширеною системою в техніці є *система, коли площини проекцій взаємно перпендикулярні, центри проекціювання віддалені в нескінченність, а напрями (проекціювальні промені) перпендикулярні до площини проекцій*. Таку систему називають – *система прямокутних* (ортогональних) *проекцій* або *метод Монжа.*

1.5. Проекція точки

Проекція точки є *точка.* Довільна точка простору при двох напрямках проекціювання в системі прямокутних проекцій зображується парою точок.

Розглянемо деяку точку *A* в просторі і взаємно перпендикулярні площини проекцій $П_1$ і $П_2$. Одна з них, яка позначена літерою $П_1$ розташована горизонтально; друга, яка позначена літерою $П_2$, вертикально. Площину проекцій $П_1$ називають *горизонтальною площиною проекцій*, а площину $П_2$ – *фронтальною*.

Лінія перетину площин називається віссю проекцій. Вісь проекцій поділяє кожну з площин $П_1$ та $П_2$ на півплощини. Для цієї осі прийняте позначення x_{12}.

Через точку *A* проведені проекціювальні промені S_1 і S_2: промінь S_1

перпендикулярний до площини проекцій Π_1, а промінь S_2 – перпендикулярний до Π_2. Промені в перетині з площинами проекцій визначають проекції точки *A* на відповідних площинах проекцій – точки A_1 та A_2.

Для побудови проекції точки на одній площині, яка суміщена з площиною кресленика, слід сумістити горизонтальну площину проекцій Π_1 з площиною проекцій Π_2 шляхом обертання навколо їх лінією перетину – осі проекцій x_{12} (рис. 1.7, а).

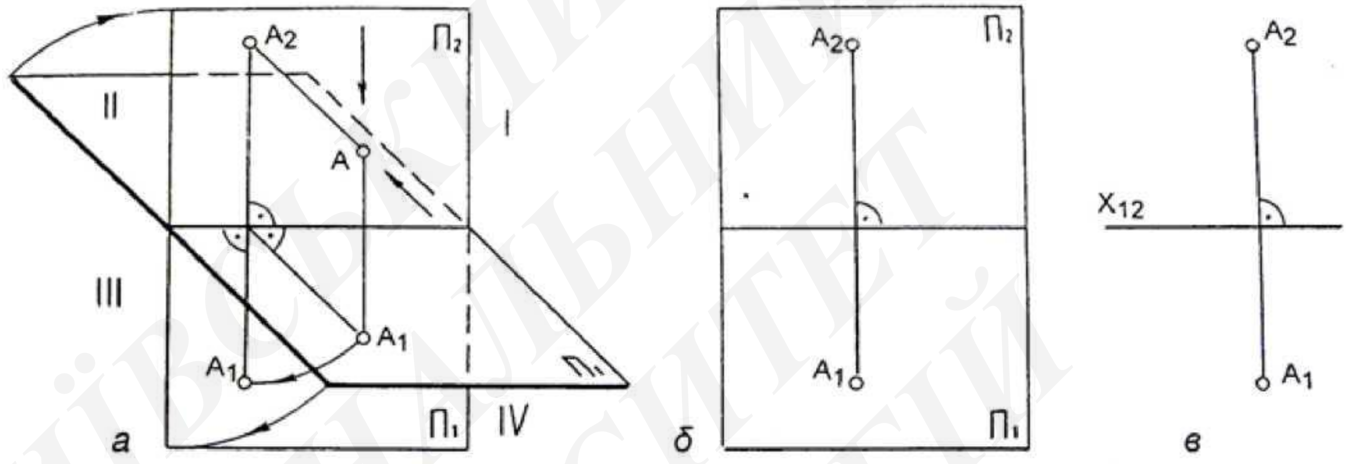


Рис. 1.7.

Пряма (рис. 1.7, *б, в*), яка з'єднує проекції A_1 та A_2 – називається *лінією проекціювального зв'язку,* або просто *лінією зв'язку*. Усі лінії зв'язку перпендикулярні до осі проекцій x_{12}, а між собою вони паралельні.

Кресленик (малюнок), який складається з двох або більше взаємно зв'язаних ортогональних проекцій називають *комплексними* або *епюром Монжа.*

Комплексний кресленик є позиційно повним і метрично визначеним, тобто по йому однозначно можна реконструювати оригінал в просторі.

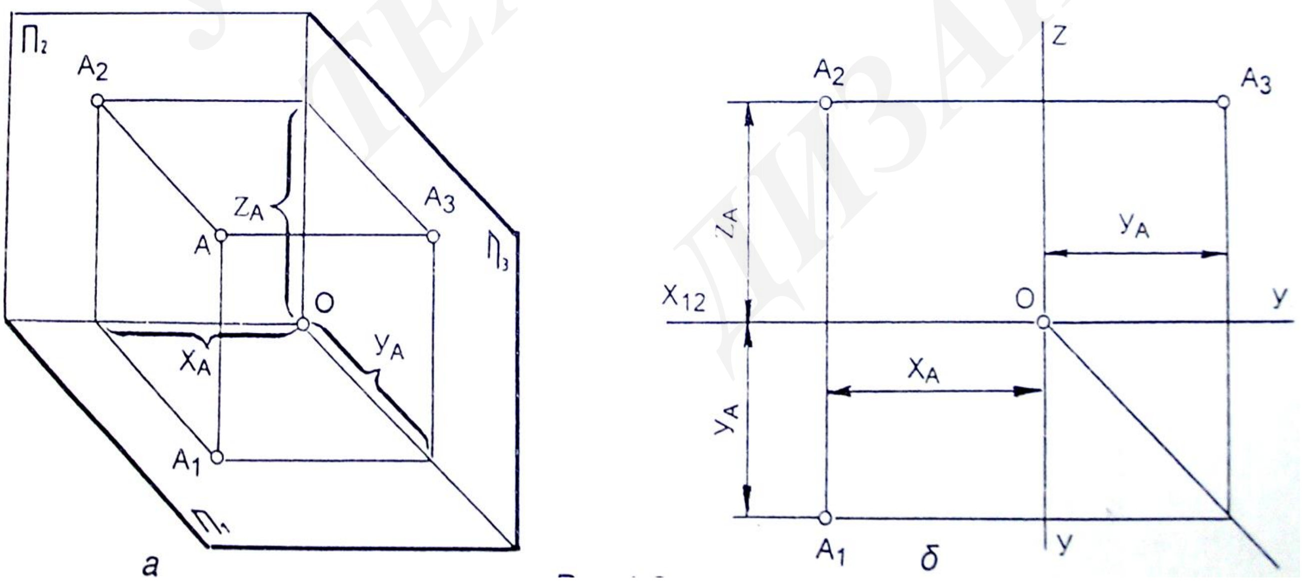


Рис. 1.8

Комплексне креслення має прямий зв'язок з декартовою системою координат.

Так, для довільної точки *A* (див. рис. 1.8, *а*, *б*) відстань від початку координат (точка *0*) до горизонтальної проекції точки A_1 по осі x_{12} визначає *абсцису* точки $A - x_A$, відстань від горизонтальної проекції точки A_2 до цієї самої осі x_{12} є її *ординатою* $- y_A$, а відстань від фронтальної проекції точки A_2 до осі x_{12} є її *аплікатою.*

Це визначає можливість будувати проекції точки на комплексному кресленику по наперед заданим координатам точки.

На рис. 1.9 представлена одна з особливостей проекцій точки: відстань між фронтальною та горизонтальною проекціями точки дорівнює сумі відстаней від точки в просторі до площин проекцій.

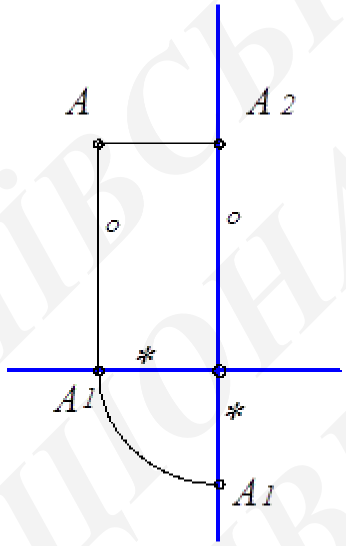


Рис. 1.9

Методи проекціювання.
Проекції точки

1.6. Проекції точки, яка розташована в різних квадрантах

Площини проекцій $П_1$ і $П_2$ нескінченні і непрозорі. Вони ділять простір на чотири двогранні кути, які називають *квадрантами.*

Їх нумерація показана на рис. 1.7, а. З інженерних міркувань прийнято рахувати, що глядач находяться в першому квадранті на нескінченно віддаленій відстані від $П_1$ і $П_2$.

При перетині простору трьома площинами проекцій, а саме площинами $П_1$, $П_2$ та $П_3$ – утворюються *октанти.*

На рис. 1.10 зображена точка *A*, яка розташована в першому квадранті. Точка *B* належить осі проекцій x_{12}.

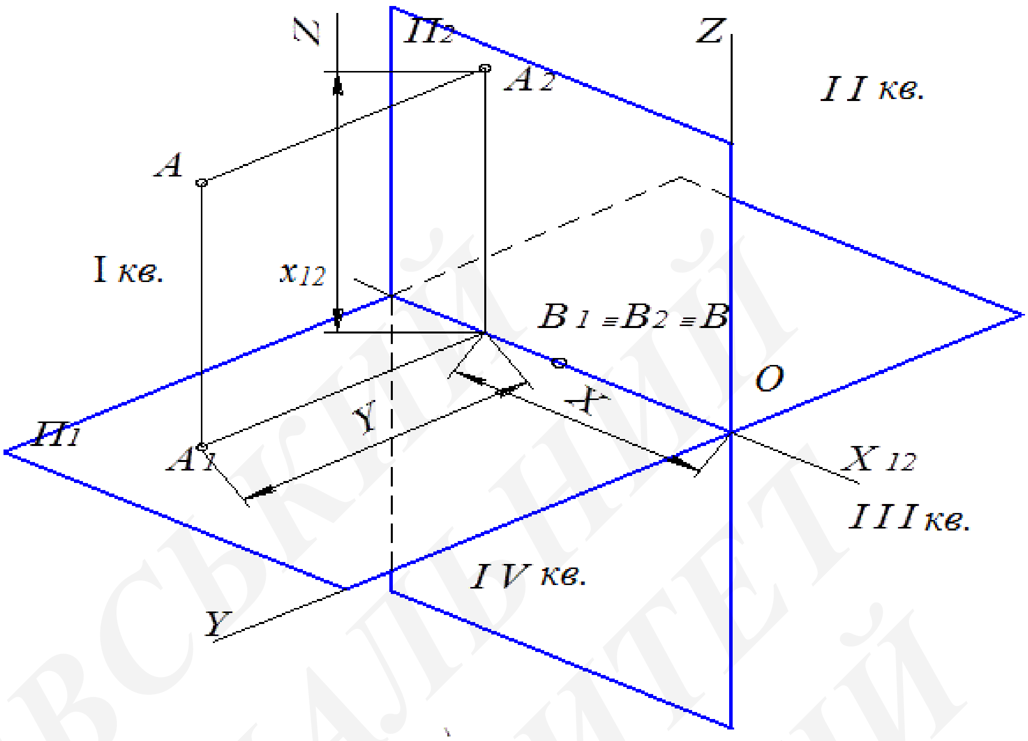


Рис. 1.10

На рис. 1.11 представлені проекції точок *A*, *B*, *C*, *D*, які розташовані в різних квадрантах:

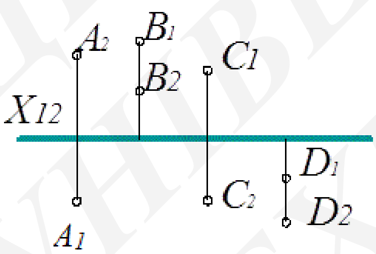


Рис. 1.11

– точка А в першому квадранті;
– точка В у другому квадранті;
– точка С в третьому квадранті;
– точка *D* в четвертому квадранті.

Побудова на комплексному кресленні проекцій точок, які розташовані в різних квадрантах

Запитання та завдання для самоконтролю:

1. Які є методи проекціювання?
2. Який основний метод проекціювання в нарисній геометрії?
3. Що таке „системаΠ_1,Π_2” і як звуться площини проекцій Π_1 та Π_2?
4. Який елемент кресленика зветься віссю проекцій?
5. Як отримати кресленик в системі Π_1, Π_2?
6. Що таке „системаΠ_1, Π_2, Π_3” і як зветься площина проекцій Π_3?
7. Що таке лінія проекціювального зв’язку?
8. Що доказує, що кресленик, який містить в собі дві зв’язані між собою проекції у вигляді точок, виражає деяку
9. Що таке октант? Що таке квадрант?
10. Побудуйте проекції точок які розташовані в різних квадрантах?
11. Побудуйте проекції точок які розташовані в різних октантах?
12. Побудувати проекції точок за їх координатами та записати в яких квадрантах вони розміщені.

	x	*y*	*z*
A	*40*	*–25*	*20*
B	*–15*	*10*	*30*
C	*25*	*5*	*–15*

13. Побудуйте другі проекції точок *A,B,C* та *D*, які знаходяться у вказаних квадрантах, якщо задана одна проекція і залежність між координатами ($y = z+n$):

а) точка *A* розташована в III квадранті, а координата по осі y_1 = -15;

б) точка *B* розташована в II квадранті, а координата по осі y_1 = -25;

в)точка *C* розташована в I квадранті, а координата по осі z_{23} = 15;

г) точка *D* розташована в IУ квадранті, а координата по осі z_{23} = 10.

14. Побудувати на комплексному кресленику проекції точки *B*, яка симетрична точці *A* ($y = -25$, $z = 15$):

а) відносно горизонтальної площини проекцій;

б) відносно фронтальної площини проекцій.

Література по темі лекції:

[2] – с. 40-42, [9] – с. 7-12, [10] – с. 22-32.

ЛЕКЦІЯ 2

ПРЯМА

<u>План лекції</u>:

2.1. Проекції прямої.

2.2. Прямі особливого положення.

2.2.1. Прямі паралельні площинам проекції.

2.2.2. Прямі перпендикулярні до площинам проекції (проекціювальні прямі).

2.2.3. Пряма розміщена в площині.

2.3. Властивості відрізка прямої.

2.4. Пряма і точка.

2.5. Дві прямі. Взаємне положення.

2.6. Метричні властивості пар геометричних фігур.

2.6.1. Проекції прямого кута.

2.1. Проекції прямої

Пряма – це лінія, яка утворюється при переміщенні точки, яка не змінює свій напрям. Пряма лінія в просторі визначається двома точками, тому і зображення прямої також визначається проекціями двох точок, наприклад, на рис. 2.1 пряма задана двома точками: A і B, або C і D.

Таким чином: *дві прямі, проведені на площинах проекцій* (проекції прямої), *визначають одну пряму в просторі.*

Положення прямої по відношенню до площин проекцій визначають кути α і β нахилу прямої до площин проекцій (див. рис. 2.1, *а*).

З усіх точок прямої важливе значення мають особливі – точки перетину прямої з площинами проекцій, які називаються *слідами прямої*:

H – *горизонтальним*; F – *фронтальним*.

Для визначення слідів прямої, знаходять точку перетину однієї проекції прямої з віссю проекцій (H_2 або F_1). З отриманої точки будують до осі проекції перпендикуляр (лінію проекціювального зв'язку), перетин якого з другою проекцією прямої і визначить відповідний слід прямої – H_1 або F_2.

Різні положення прямої в просторі дають і різні положення слідів – нижче чи вище осі проекцій (рис. 2.1, *б, в*) і в особливому випадку на осі проекцій. Слід прямої збігається з однойменною проекцією прямої, а друга його проекція – з віссю проекцій x_{12}.

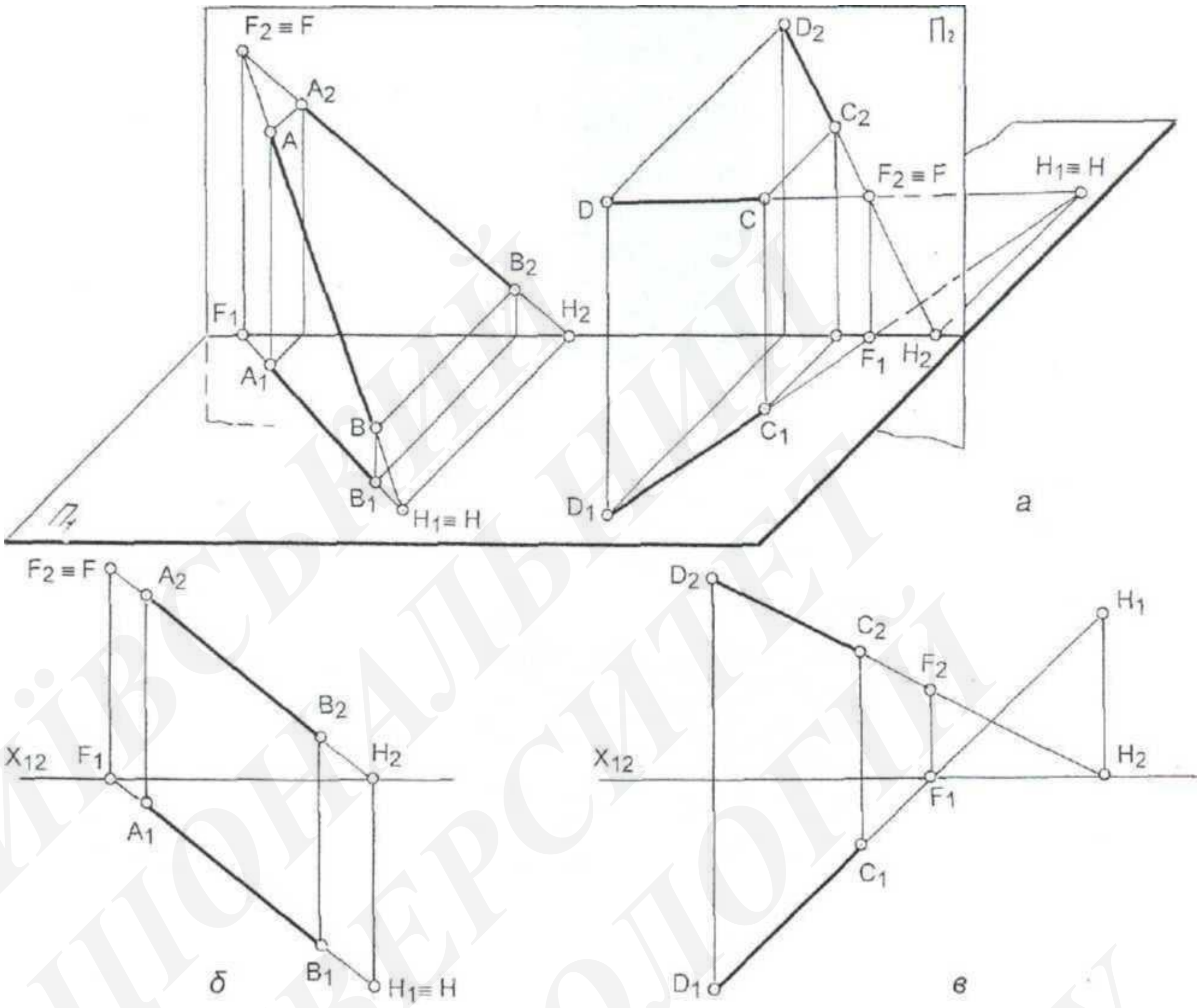


Рис. 2.1

Проекції прямої. Сліди прямої

2.2. Прямі особливого положення

Пряма лінія простору займає в системі площин проекції деяке визначене положення. Вона може бути розміщена довільно відносно площин проекцій або займати деяке особливе положення – бути паралельною або перпендикулярною площинам проекції, належати площинам проекції та інше.

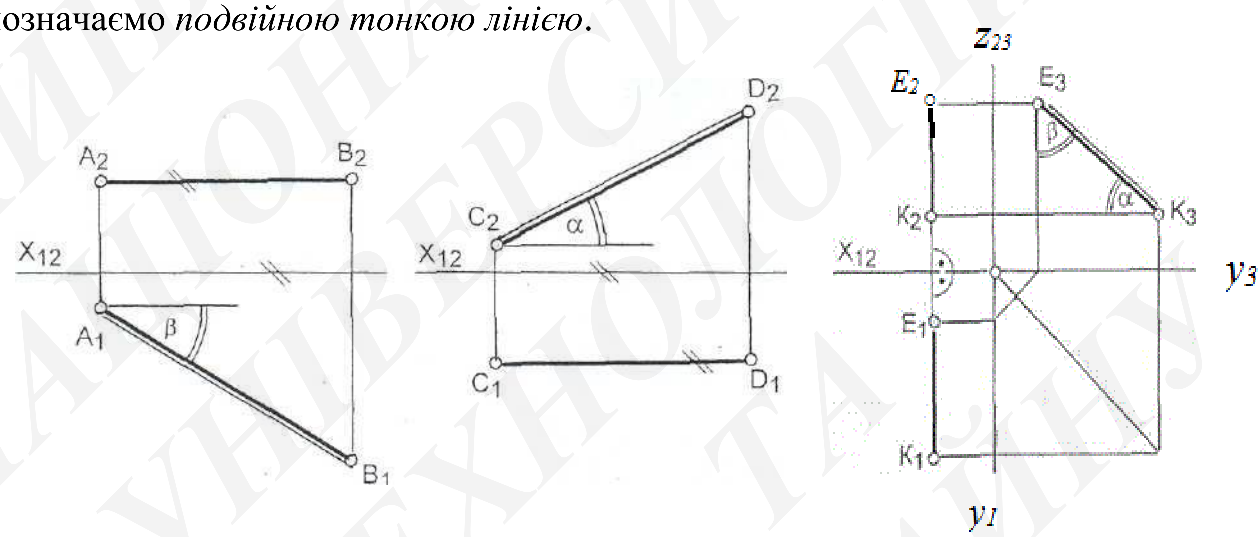
Пряма лінія, яка займає в системі площин проекцій довільне (загальне) положення, називається *прямою загального положення* (рис. 2.1). При цьому ні жодна з проекцій прямої не паралельна осі проекцій і не перпендикулярна до неї.

Кожна проекція прямої менше самого відрізка: $A_1B_1<AB$, $A_2B_2<AB$.

2.2.1. Прямі паралельні площинам проекції

Пряма, яка паралельна горизонтальній площині проекцій, *називається горизонтальною лінією рівня або горизонтальною прямою.*

В цьому випадку відстань від будь-якої точки такої прямої до горизонтальної площини проекцій $П_1$ однакова (на рис. 2.2, *а* аплікати усіх точок прямої однакові). В наслідок цього фронтальна проекція A_2B_2 прямої буде паралельна осі проекцій x_{12}, а горизонтальна проекція A_1B_1 є *дійсною* або *натуральною величиною* (*НВ*) прямої та утворює з віссю проекцій *дійсну (натуральну) величину кута нахилу прямої до фронтальної площини проекцій* (кут β). Натуральну величину відрізка та кут його нахилу до площини проекцій позначаємо *подвійною тонкою лінією*.



а *б* *в*

Рис. 2.2

Пряма, яка паралельна фронтальній площині проекцій, *називається фронтальною лінією рівня або фронтальною прямою.*

Аналогічно наведеному вище, доходимо до висновку, що горизонтальна проекція C_1D_1 відрізка паралельна до $П_2$ (рис. 2.2, *б*). На фронтальну площину проекцій відрізок *CD* проекціюється в дійсну величину C_2D_2, а кут між фронтальною проекцією відрізка і віссю x_{12} буде дійсною величиною кута нахилу відрізка до $П_1$ (кут α).

Пряма, яка паралельна профільній площині проекцій, *називається профільною лінією рівня або профільною прямою.* Горизонтальна і фронтальна проекції прямої перпендикулярні до осі x_{12} і збігаються з лінією проекціювального зв’язку (рис. 2.2, *в*). Профільна проекція прямої є дійсною величиною відрізка, а кути між профільною проекцією і висями y_3 та z_{23} є дійсними кутами нахилу профільного відрізка до площин проекцій $П_1$ і $П_2$.

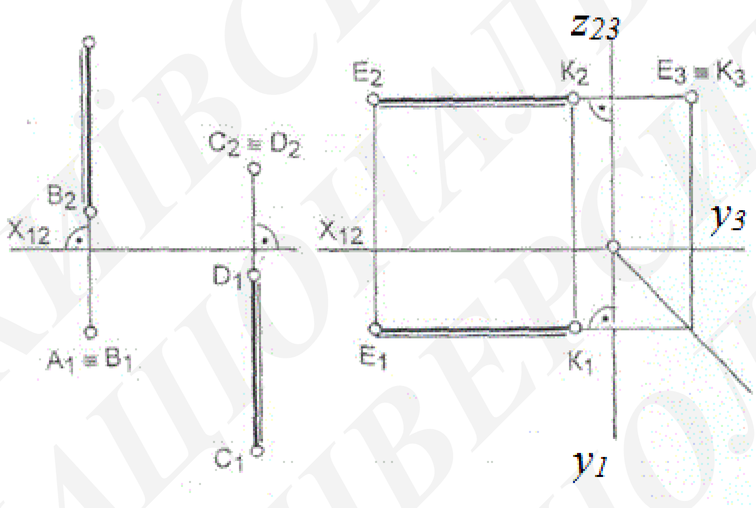
2.2.2. Прямі перпендикулярні до площини проекцій (проекціювальні прямі)

Пряма, яка паралельна напрямку проекціювання (збігається з проекціювальним променем), називається *проекціювальною прямою.*

Пряма, напрямок якої співпадає з напрямком проекціювання, тобто перпендикулярна до площини проекцій, проекціюється на цю площину в *точку.*

Пряму, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій називають *горизонтально проекціювальною* (відрізок *AB* на рис. 2.3, *а*), до фронтальної площини проекцій – *фронтально проекціювальною* (пряма *CD*, на рис. 2.3, *б*), а до профільної – *профільно проекціювальною* (пряма *EK* на рис. 2.3, *в*).

Проекціювальні прямі перпендикулярні до однієї площини проекцій і паралельні двом іншим площинам проекцій, на які вони проекціюються в натуральну величину.



а *б* *в*

Рис. 2.3

2.2.3. Пряма розміщена в площині проекцій

До прямих особливого положення відносяться також прямі, які розміщені в площинах проекцій. В цьому випадку пряма збігається зі своєю проекцією на цю ж площину проекцій. На іншу площини проекцій пряма проекціюється прямою, яка збігається з віссю проекцій.

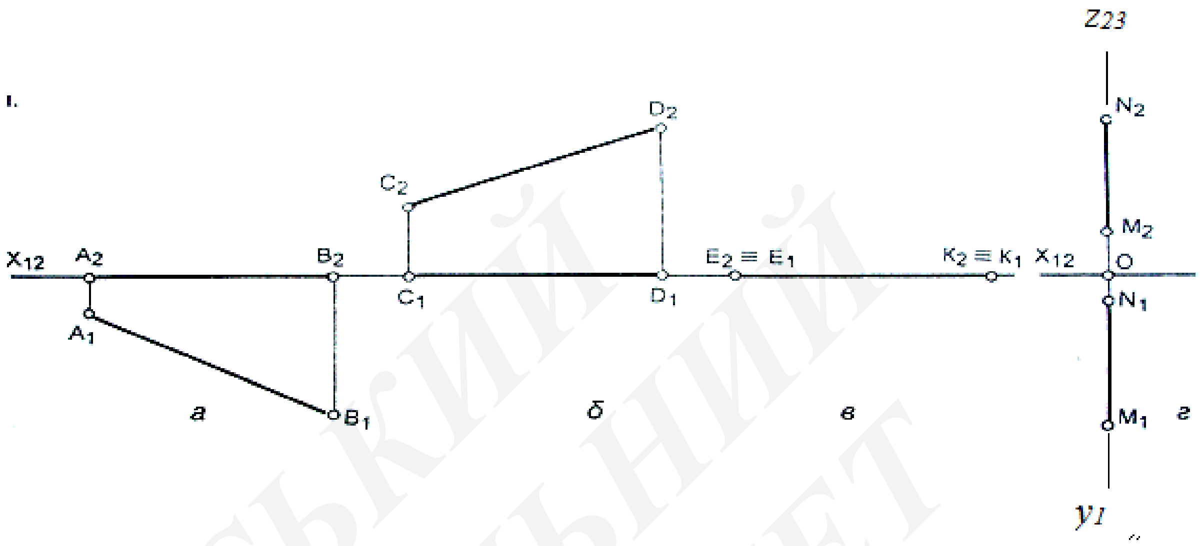


Рис. 2.4

На рис. 2.4 наведені проекції прямих які належать площинам проекцій: на рис. 2.4, *а* пряма *AB* належить $П_1$; на рис. 2.4, *б* пряма *CD* належить $П_2$; на рис. 2.4, *в* пряма *EK* належить осі площин проекцій x_{12}; а на рис. 2.4, *г* пряма *MN* належить $П_3$.

Прямі особливого положення

2.3. Властивості відрізка прямої

Пряму лінію яка займає в системі площин проекцій довільне (загальне) положення, називають *прямою загального положення.* На рис. 2.5 ортогональні проекції такої прямої розташовані під довільними кутами до осі проекцій.

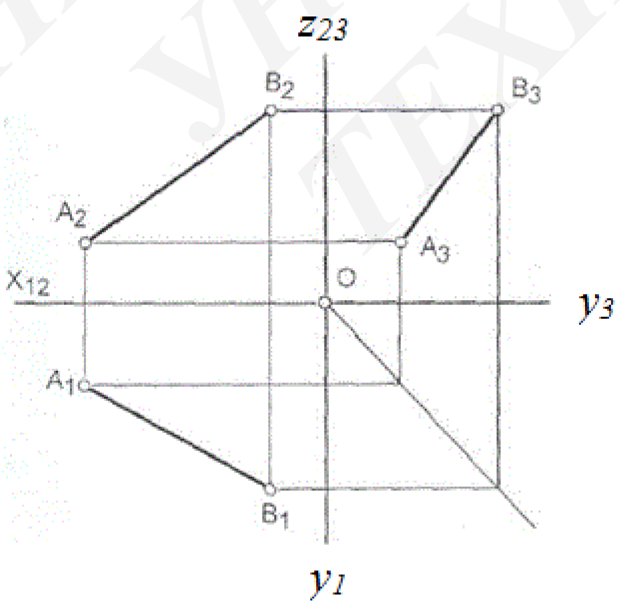


Рис. 2.5

При розгляді відрізка прямої часто потрібно визначити його натуральну величину та кути нахилу до площин проекцій. Тобто доводиться розв’язувати метричну задачу: це будь-яка задача, в умові або при розв’язанні якої є числова характеристика. Є дві основні метричні задачі, одна з них – визначення *натуральної величини відрізка*.

Довжина будь-якої ортогональної проекції відрізка прямої загального положення менша за довжину самого відрізка цієї прямої.

Дійсну величину відрізка прямої загального положення та кути нахилу його до площин проекцій $П_1$ та $П_2$ можна визначити за допомогою *способу прямокутного трикутника.*

<u>Спосіб прямокутного трикутника</u>. Розглянемо розташовану в просторі пряму загального положення яка задана відрізком *AB*. Його горизонтальна проекція на площині проекцій $П_1$– відрізок A_1B_i (див. рис. 2.6).

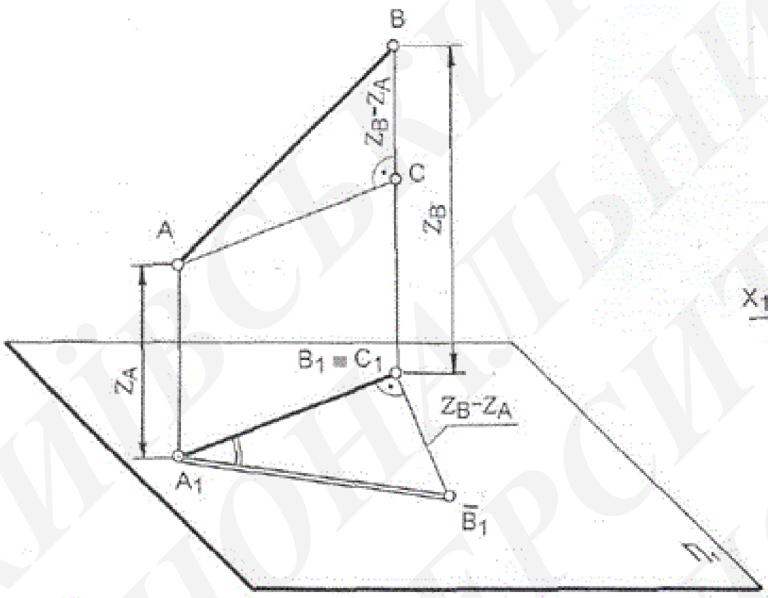


Рис. 2.6

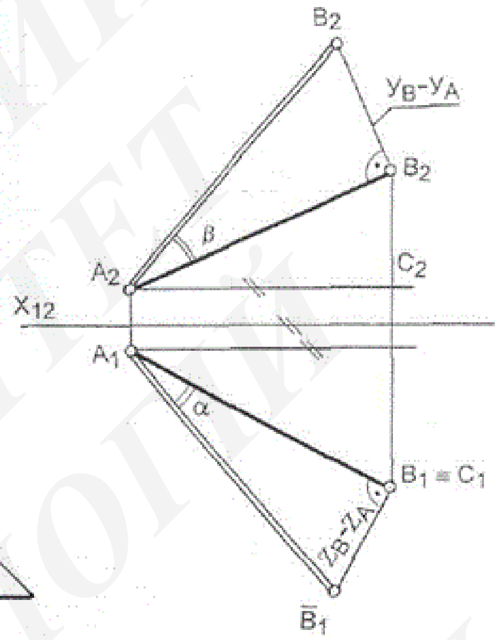


Рис. 2.7

Заданий відрізок *AB* можна розглянути як гіпотенузу прямокутного трикутника *ABC*, один катет *AC* якого паралельний площині проекцій $П_1$, а інший – *BC* перпендикулярний до $П_1$. Катет *AC* дорівнює горизонтальній проекції A_1B_1 відрізка *AB*. Катет *BC* дорівнює різниці аплікат кінцевих точок *B* та *A* відрізка, а саме: Z_B – Z_A. Кут між гіпотенузою *AB* та катетом *AC* є натуральною величиною кута нахилу відрізка до горизонтальної площини проекцій $П_1$. Визначивши натуральні величини катетів трикутника в просторі, будуємо на базі горизонтальної проекції A_1B_1 заданого відрізка *AB* трикутник $A_1B_1\overline{B}_1$, який суміщений з горизонтальною площиною проекцій. Гіпотенуза $A_1\overline{B}_1$ побудованого трикутника буде визначати натуральну величину відрізка *AB*, а кут $\overline{B}_1A_1B_1$ – натуральну величину кута нахилу відрізка *AB* до площини проекцій $П_1$.

На комплексному кресленику (див. рис.2.7) розглянута ця задача. На горизонтальній проекції відрізка, прийнявши його за катет, будуємо прямокутний трикутник. Тоді другим катетом буде різниця аплікат кінцевих точок B_2 та A_2 відрізка: z_B–z_A. Гіпотенуза $A_1\overline{B}_1$ прямокутного трикутника $A_1\overline{B}_1B_1$ є дійсною величиною відрізка *AB*. Кут між горизонтальною проекцією A_1B_1 відрізка і натуральною величиною відрізка (гіпотенузою трикутника $A_1\overline{B}_1B_1$), дорівнює куту нахилу (кут α) самого відрізка AB до горизонтальної площини проекцій Π_1.

Аналогічні побудови можна виконати спираючись на фронтальну проекцію A_2B_2 відрізка (див. рис. 2.7). Цю проекцію використовують як катет прямокутного трикутника. Другий катет будують таким, що дорівнює різниці ординат кінцевих точок B_1 та A_1відрізка: $y_B – y_A$. Гіпотенуза $A_2\overline{B}_2$, як і в попередньому прикладі, визначає дійсну величину відрізка, а кут між проекцією A_2B_2 відрізка і його натуральною величиною (гіпотенузою $A_2\overline{B}_2$) є кутом нахилу (кут β) відрізка вже до фронтальної площини проекцій Π_2.

Проекції прямої та її властивості

2.4. Пряма і точка

Точка може належати прямій або не належати їй. *Точка належить прямій, якщо проекції точки та прямої співпадають (збігаються) на відповідних площинах проекцій і знаходяться на одній лінії проекціювального зв'язку.*

Точка не належить прямій якщо хоча б одна з її проекцій не належить проекції прямої.

На рис.2.8, *а* точка A *належить* прямій m, але на рис. 2.8, *б* точки B та C *не належать* прямій n, хоча одна з проекцій цих точок належить проекції прямій n. Точка B розміщена вище прямої n, а точка C ближче прямої n відносно площини проекцій Π_2.

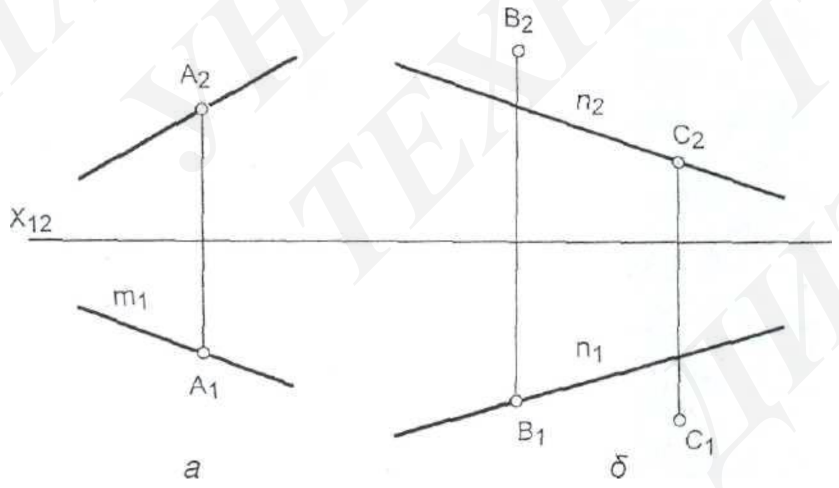


Рис. 2.8

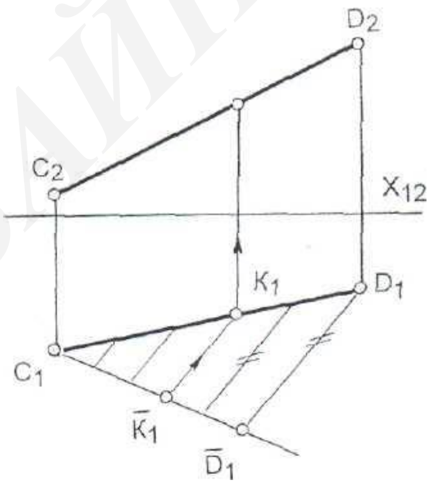


Рис.2.9

Точка на прямій поділяє її на два відрізки. Якщо точка поділяє відрізок на дві частини в певному співвідношенні, то і проекції точки поділяють проекції відрізка в тому ж співвідношенні.

Щоб розділити відрізок прямої в заданому відношенні досить розділити в тому ж відношенні проекції відрізка (див. рис.2.9). Для цього з однієї з точок проекції відрізка(C_1) проводимо допоміжний промінь. На ньому відкладаємо дійсну величину відрізка CD (відрізок $C_1\overline{D}_1$) та точку $\overline{К}$, яка поділяє відрізок у заданому відношенні. Точку $\overline{D}_1$ сполучаємо з точкою D_1. З точки $\overline{К}$ проводимо промінь паралельно $\overline{D}_1D_1$. Визначена точка K_1 поділяє горизонтальну проекцію C_1D_1 відрізка в заданому відношенні. Фронтальну проекцію точки K визначаємо за її відповідністю.

Належність точки до прямої

2.5. Дві прямі. Взаємне положення

Дві прямі в просторі можуть бути*: паралельними, перетинатись та мимобіжними (перехресними).*

Дві прямі в просторі паралельні, якщо паралельні їх однойменні проекції, (рис. 2.10).

Однойменні проекції прямих, які перетинаються, також перетинаються і точка їх перетину лежить на лінії проекціювального зв'язку. Це пояснюється наявністю спільної точки у цих прямих (рис. 2.11).

Однойменні проекції мимобіжних (перехресними) прямих, можуть перетинатись, але точки їх перетину не лежать на одній лінії проекціювального зв'язку (рис. 2.12).

Дві точки, які належать (інциденті) одній лінії проекціювального зв'язку (або одній проекціювальній прямій), а на одній з площин проекцій їх проекції збігаються, називаються *конкуруючими точками*. Їх властивість використовують для визначення „перекривання” геометричних елементів одного другим, тобто *видимості* елементів на площинах проекцій.

З конкуруючих точок, видимою буде та, у якої позитивна координата буде більшою.

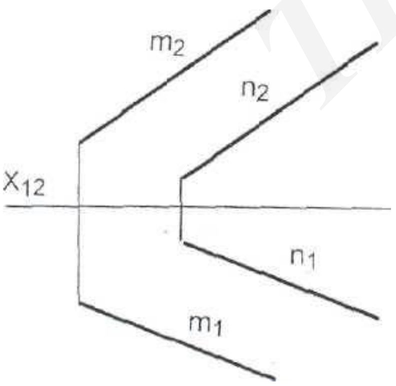


Рис. 2.10

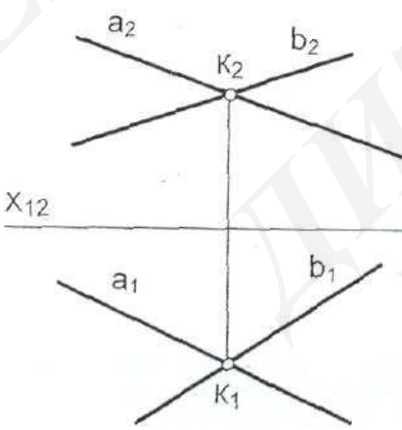


Рис. 2.11

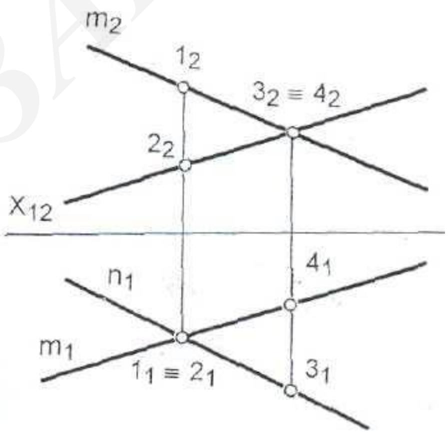


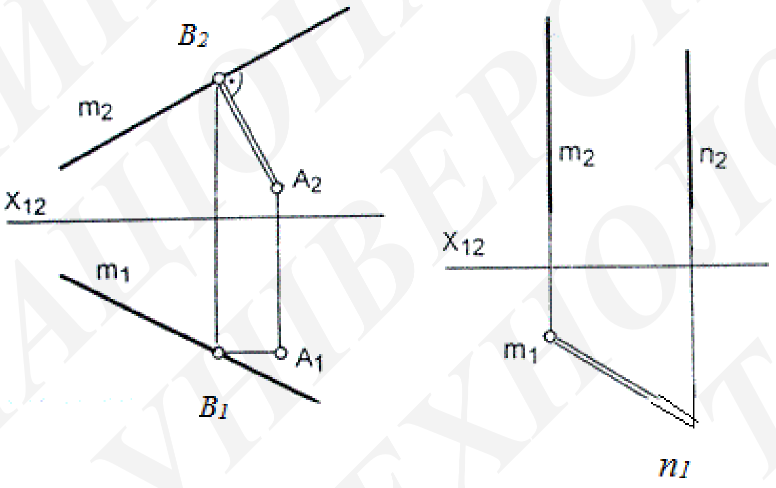
Рис. 2.12

На рис. 2.12, для визначення видимості („перекриття”) прямих *m* і *n* на горизонтальній площині проекцій $П_1$, взяті конкуруючі точки *1* і *2*, а точки *3* і *4* для визначення видимості тих же прямих на фронтальній площині проекцій $П_2$. Так як точка 1_2 (яка належить прямій *m)* розміщена вище (більша апліката) від точки 2_2 (яка належить прямій *n),* то пряма *m* буде „перекривати” пряму *n* на горизонтальній площині проекцій $П_1$, тобто пряма *m* буде розташована над прямою *n* – буде видимою. Точка *3*, яка належить прямій *n*, знаходиться ближче ніж точка *4* (більша ордината) і тому на фронтальній площині проекцій $П_2$ пряма *n* „перекриває” пряму *m*. Пряма *n* розташована попереду від прямої *m* – вона видима.

Взаємне положення прямих

2.6. Метричні властивості пар геометричних фігур

Відстань від точки до прямої вимірюється по перпендикуляру проведеному з цієї точки до прямої (рис. 2.13).



а *б*

Рис. 2.13

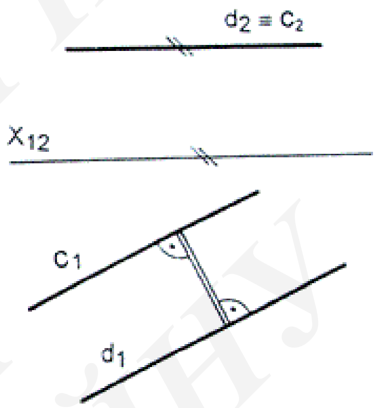


Рис. 2.14

Якщо паралельні прямі *перпендикулярні* до площини проекцій (до площини $П_1$на рис. 2.14, *а*), або площина, в якій вони розташовані, *паралельна* до певної площини проекцій (до площини$П_1$ на рис.2.14, *б*), то відстань між ними на цю площину проекціюється *дійсною величиною*.

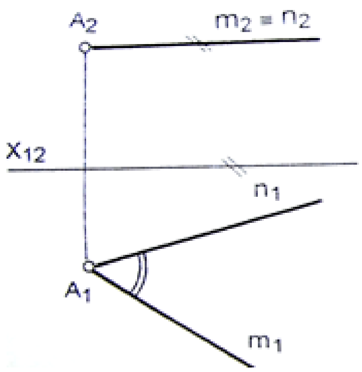


Рис. 2.15

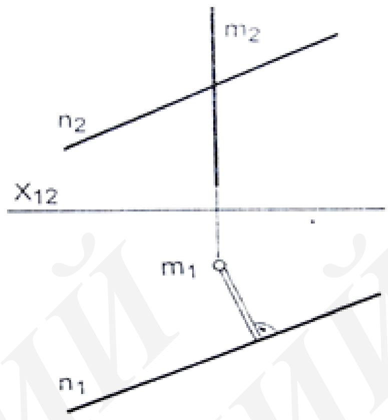


Рис. 2.16

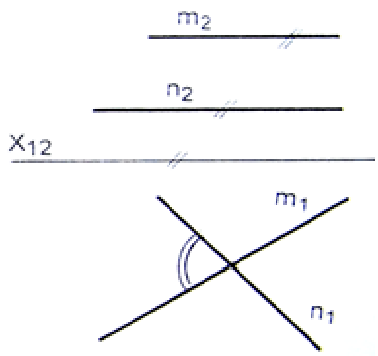


Рис. 2.17

Кут відмінний від прямого, який утворено прямими, що перетинаються, проекціюється без спотворень тільки тоді, коли його площина паралельна площині проекцій (рис. 2.15).

Відстань між мимобіжними прямими проекціюється в натуральну величину за умови перпендикулярності однієї із прямих до певної площини проекцій (рис. 2.16.)

Кут між двома мимобіжними прямими зображується в натуральну величину якщо вони обидві (їх площина паралелізму) паралельні площині проекцій (рис.2.17).

Якщо площина тупого або гострого кута не перпендикулярна до площини проекцій та хоча б одна з сторін кута паралельна площині проекцій, то проекція тупого кута на цю площину представляє собою тупий кут, а проекція гострого кута – гострий кут.

Якщо сторони кута паралельні площині проекцій або однаково нахилені до неї, то поділ проекції кута на цій площині навпіл відповідає поділу навпіл і самого кута в просторі.

2.6.1. Проекції прямого кута

Прямий кут між прямими проекціюється в натуральну величину, якщо хоч одна із його сторін паралельна до цієї площини проекцій. Це положення можна назвати як *властивість прямого кута*.

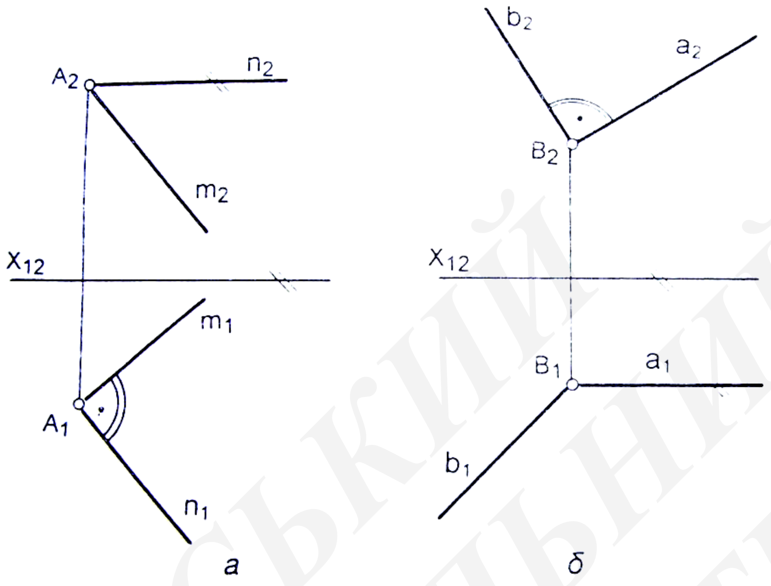


Рис. 2.18

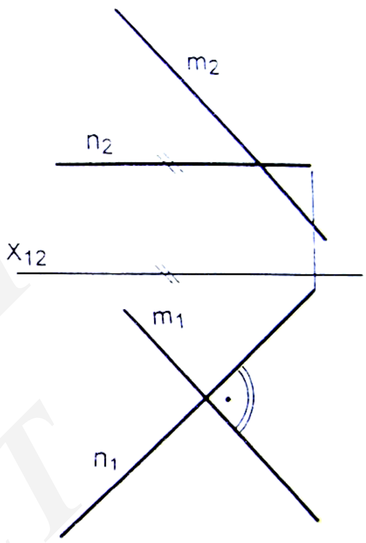


Рис. 2.19

На рис. 2.18 зображено проекціювання в натуральну величину прямого кута між прямими які перетинаються. Прямий кут між прямими $m \cap n$ проекціюється в натуральну величину на площину $П_1$ (рис. 2.18, *а*), між прямими $a \cap в$ – на площину $П_2$.

На рис. 2.19 наведено проекціювання прямого кута між мимобіжними прямими m та n.

Запитання та завдання для самоконтролю:

1. Як зображуються в проекціях прямі особливого і загального положення?
2. Які прямі зображуються в натуральну величину на площинах проекцій?
3. Коли кут нахилу прямої до площини проекцій зображується в *НВ?*
4. У чому полягає суть способу прямокутного трикутника?
5. Чому одна з проекцій фронтального або горизонтального слідів прямої лежать на осі проекцій?
6. Назвіть умову паралельності двох прямих.
7. Назвіть умову належності точки до прямої.
8. Що означає термін „конкуруючі” точки?
9. Чи можна довільно задати горизонтальну та фронтальну проекції точки, яка належить (інцидентна) профільній прямій?
10. За якою умовою прямі перетинаються? Як ці прямі зображуються на комплексному кресленику?
11. В якому випадку прямий кут проекціюється без спотворення – в натуральну величину?
12. Чи є можливість на комплексному кресленику двох профільних прямих визначити, паралельні вони між собою?

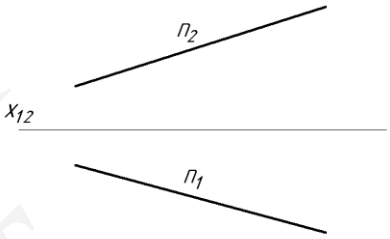
13. В якому випадку проекція тупого або гострого кута завжди є кутом з тією ж назвою (тупий чи гострий)?

14. Чи може проекція гострого або тупого кута,в якого одна з сторін паралельна до площини проекцій, дорівнювати самому куту в просторі?

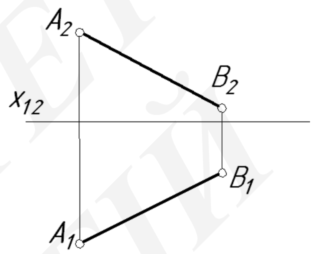
15. В якому випадку поділ проекції кута навпіл відповідає такому ж поділу кута в просторі?

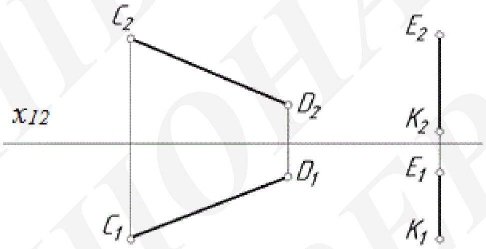
16. На заданій прямій *n* побудувати: а) проекції точки *A*, яка належить прямій *n* ($A \in n$); б) проекції точки *B*,

яка розміщена над прямою *n*; в) проекції точки *C*, яка розміщена над прямою.



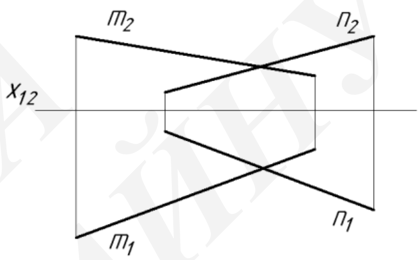
17. Побудувати сліди заданої прямої

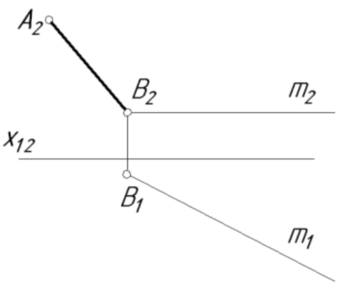




18. Визначити дійсну величину відрізків AB, CD, EK та кути нахилу їх до площин проекцій П1 та П2.

19. Побудувати пряму яка: а) перетинає задані прямі *m* і *n*; б) паралельна площині проекцій *m*; в) перехресна з прямою *n*; паралельна осі x_{12}.





20. Задана пряма *m*, яка паралельна горизонтальній площині проекцій, та фронтальна проекція перпендикулярного до неї відрізка *AB*. Побудувати прямокутник *ABCD* з основою *BC* на прямій *m*, виходячи з умови, що довжина основи рівна *1,5 AB*.

Література по темі лекції:

[2] – с. 43-47, [9] – с. 13-15, [10] – с. 36-48.

ЛЕКЦІЯ 3

ПЛОЩИНА

<u>План лекції</u>:

3.1.Способи задання площини.

3.2. Особливі положення площини.

3.3.Належність прямої та точки площині.

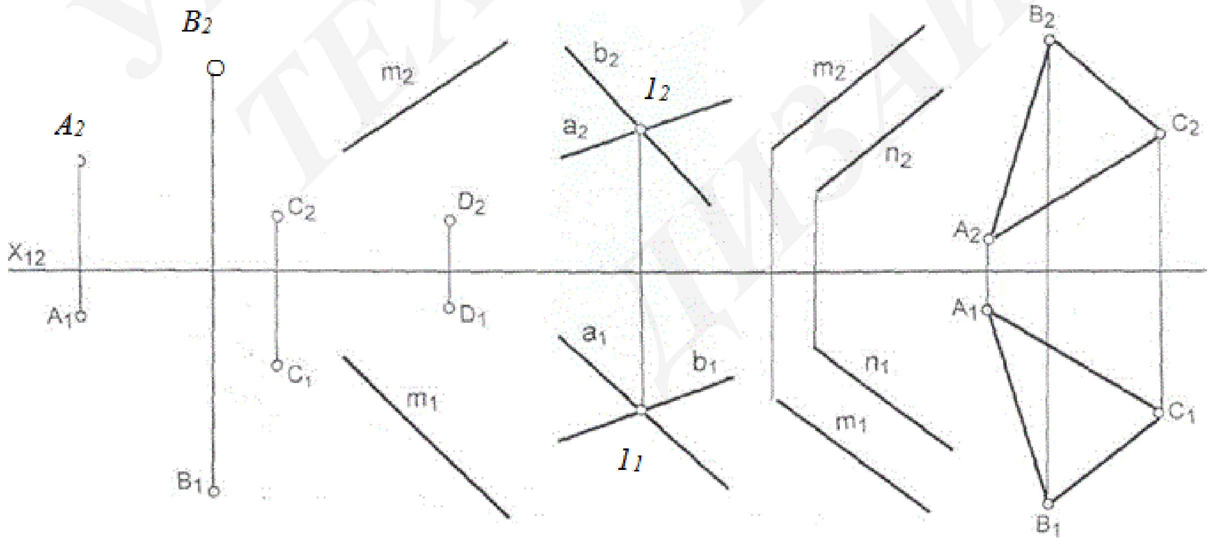
3.4.Головні лінії площини.

3.1. Способи задання площини

Якщо точка є *нуль-вимірною* геометричною фігурою – вона не має розмірів, пряма – *одномірною*, то площина буде *двомірною* геометричною фігурою.

Площина на комплексному кресленні визначається (її можна задати): трьома точками, що не належать одній прямій (рис. 3.1, *а*); прямою та точкою, що не належить прямій (рис. 3.1, *б*); прямими, що перетинаються (рис. 3.1, *в*) ;паралельними прямими (рис.3.1, *г*); плоскою фігурою (наприклад, *трикутним відсіком* – рис. 3.1, *д*).

Таким чином на комплексному кресленику (епюрі) площина однозначно може бути задана двома проекціями цих прямих і точок. На рис. 3.1 видно, як можна перейти від одного задання площини до другого, якщо добавити або виключити будь-який елемент в начальному завданні площини



а *б* *в* *г* *д*

Рис. 3.1

На комплексному кресленні можна задавати площину лініями перетину її з площинами проекцій $П_1$ та $П_2$. Лінії перетину площини з площинами проекцій називають *слідами площини.*

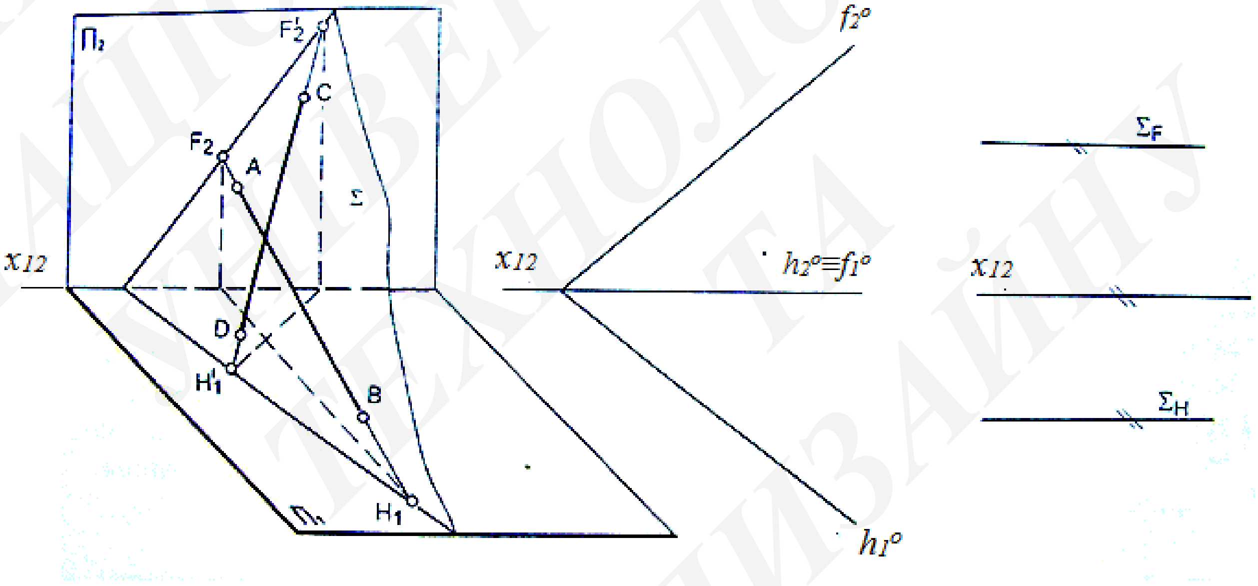
Сліди площини називають по їх належності площинам проекцій, тобто *горизонтальним* та *фронтальним.*

Відповідні сліди прямих, які перетинаються (прямі $AB \cap CD$ на рис. 3.2, *а*), визначають сліди площини на відповідних площинах проекцій. Сліди площини повинні перетинатись на осі проекцій x_{12} у власній (рис.3.2, *б*) або невласній точці (рис 3.2, *в*).

Необхідно відмітити, що одна проекція сліду збігається з самим слідом, а друга проекція – збігається з віссю проекцій і вона, як правило, не фіксується.

Кут між слідами на комплексному кресленику не дорівнює куту, який утворений слідами площини у просторі. Дійсно, в перетині слідів знаходиться вершина тригранного кута, дві грані якого збігаються з площинами проекцій. Але сума двох плоских кутів тригранного кута більше третього плоского кута. Тому кут, який утворений слідами h_1^o та f_1^o на кресленику, завжди більше кута між цими слідами в просторі.

Проекції площини

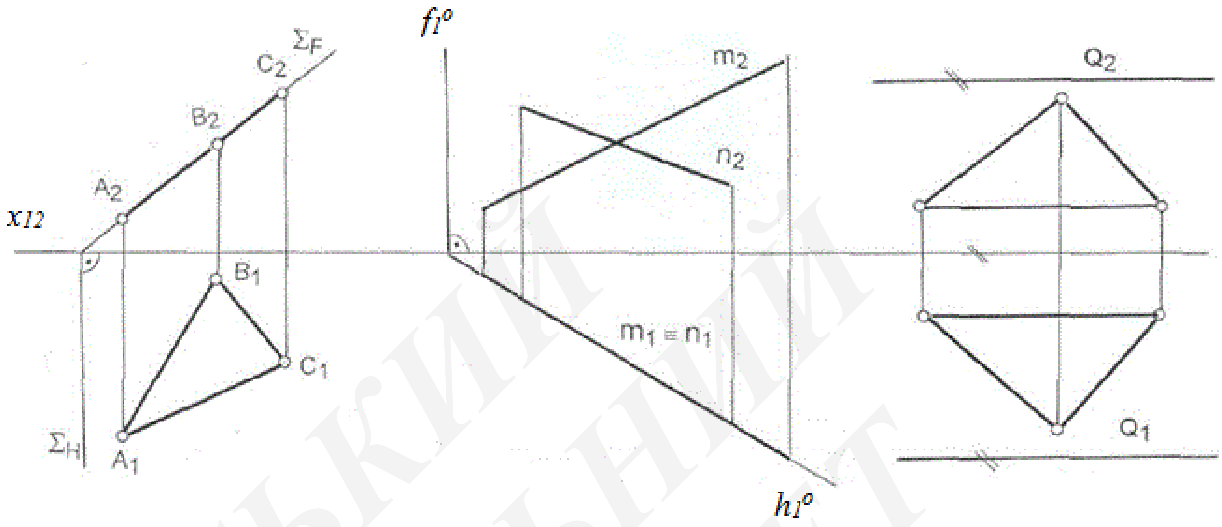


а *б* *в*

Рис. 3.2

3.2. Особливі положення площини

Площини можуть займати особливі положення по відношенню до площин проекцій. Площини перпендикулярні площинам проекцій називаються *проекціювальними.* Один слід такої площини розміщується перпендикулярно відповідній осі проекцій, а другий – довільно.

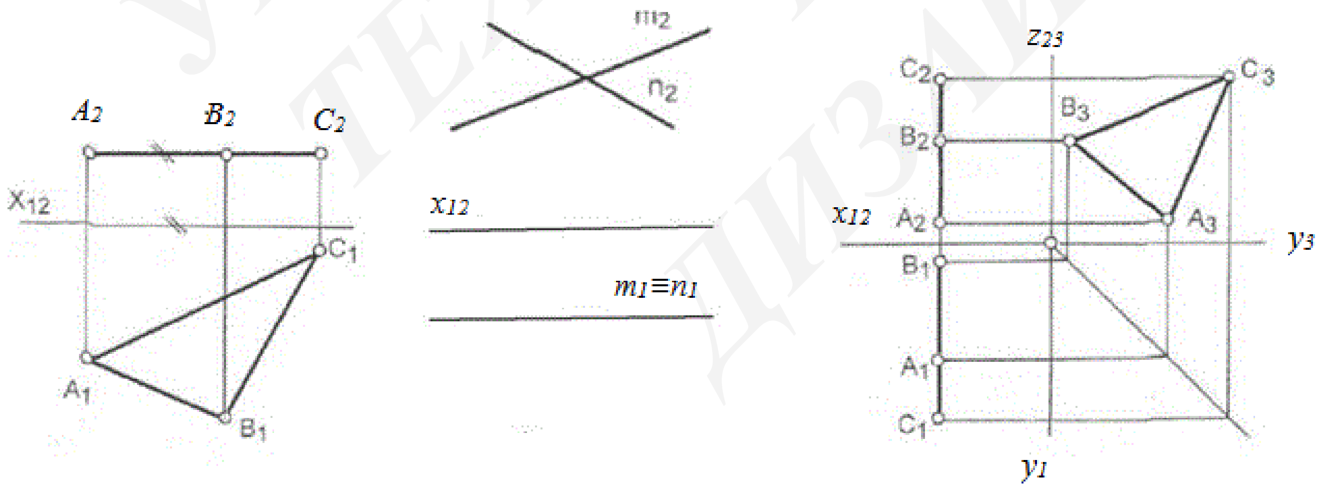


а *б* *в*

Рис. 3.3

Площина *Σ* (див. рис. 3.3, *а*) є *фронтально проекціювальною площиною* – її горизонтальний слід розміщується перпендикулярно до осі проекцій x_{12}. На рис. 3.3, *в* площина Δ г*оризонтально проекціювальна площина* – її фронтальний слід розміщується перпендикулярно осі проекційx_{12}, а площина *Q* (див. рис. 3.3, *в*) *профільно проекціювальна* – обидва сліди її паралельні до осі проекцій x_{12}.

Площини, які паралельні площинам проекцій, називаються *площинами рівня* (рис. 3.4). Площина *Σ* – *горизонтальна* (рис. 3.4, *а*), площина Δ – *фронтальна* (рис. 3.4,*б*). Ці площини мають один слід, який паралельний до осі проекцій. Площина Q – *профільна* (рис. 3.4, *в*), обидва сліди її утворюють одну пряму, яка перпендикулярна осі проекцій x_{12}. Площини рівня є *проекціювальними*, так як вони перпендикулярні площинам проекцій.



а *б* *в*

Рис. 3.4

Проекціювальні площини мають особливість:*одна проекція фігури, яка належить цій площині, проекціюється у відрізок прямої, який збігається з одним із слідів площини* (рис. 3.3, *а*,*б*).

Враховуючи ці особливості проекцію вальних площин зручно використовувати їх як *допоміжні площини посередники* при розв'язанні різних задач.

3.3. Належність прямої та точки площині

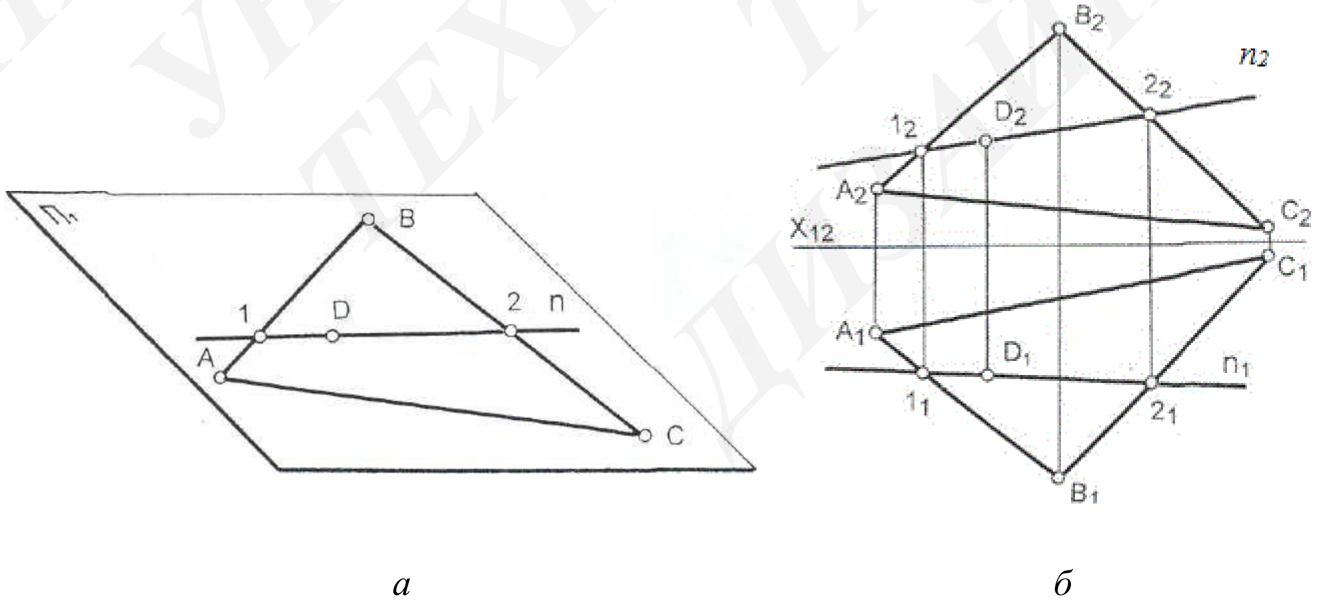
Як побудувати на комплексному кресленику пряму лінію, яка належить площині? Ця побудова основана на двох положеннях, які відомі з геометрії.

1) *Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, які належать цій площині* (див. рис. 3.5, *а*).

2) *Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, яка належить даній площині, та паралельна прямій, яка знаходиться в цій площині або паралельна цій площині.*

З цього можна зробити висновок, що якщо площина задана слідами, то *пряма належить площині, якщо сліди прямої знаходяться на однойменних з ними слідах площини*. Також можна сказати, що пряма *належить площині, якщо вона паралельна одному з слідів цієї площини та має з іншим слідом спільну точку.*

Якщо це буде довільна пряма, то одна її проекція береться довільно, а друга повинна бути побудована. Наприклад, на рис. 3.5, *а* довільна проекція прямої n_2, визначені точки 1_2 та 2_2 перетину її зі сторонами A_2B_2 та B_2C_2 трикутного відсіку. Визначивши горизонтальні проекції точок *1* та *2* за їх відповідністю, сполучаємо їх, тим самим будуємо горизонтальну проекцію прямої *n*.



а *б*

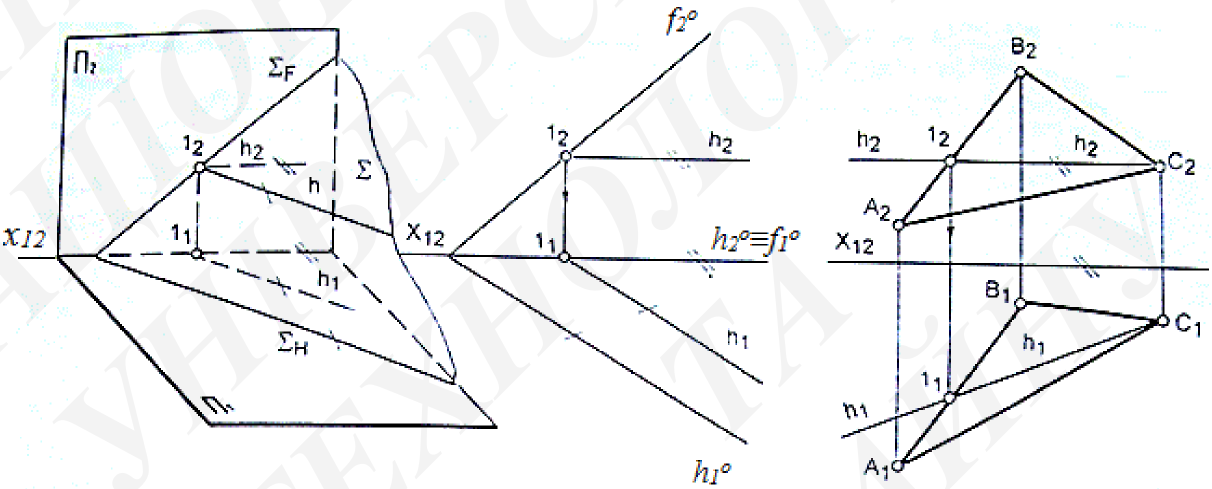
Рис. 3.5

Для побудови на комплексному кресленику точки, яка належить площині, необхідно попередньо побудувати пряму, яка лежить в площині, а потім на прямій вибирають точку (точка *D* на прямій *n,* рис.3.5, *б*).

Належність прямої і точки до площини

3.4. Головні лінії площини

В площині є безліч прямих ліній. Із всіх прямих площини необхідно виділити такі, які розміщені особливо – так звані *головні лінії площини*. До них відносять *горизонталь площини* (рис. 3.6), *фронталь площини* (рис. 3.7) та *лінії найбільшого нахилу* (рис. 3.8.). Ці прямі мають важливе значення, як допоміжні елементи в різних графічних операціях.



а *б* *в*

Рис. 3.6

Проекції горизонталі розміщуються на площинах проекцій: фронтальнаh_2паралельно осі проекцій x_{12} (рис. 3.6); горизонтальна h_1 – паралельно горизонтальному сліду (рис. 3.6, *а, б, в*).

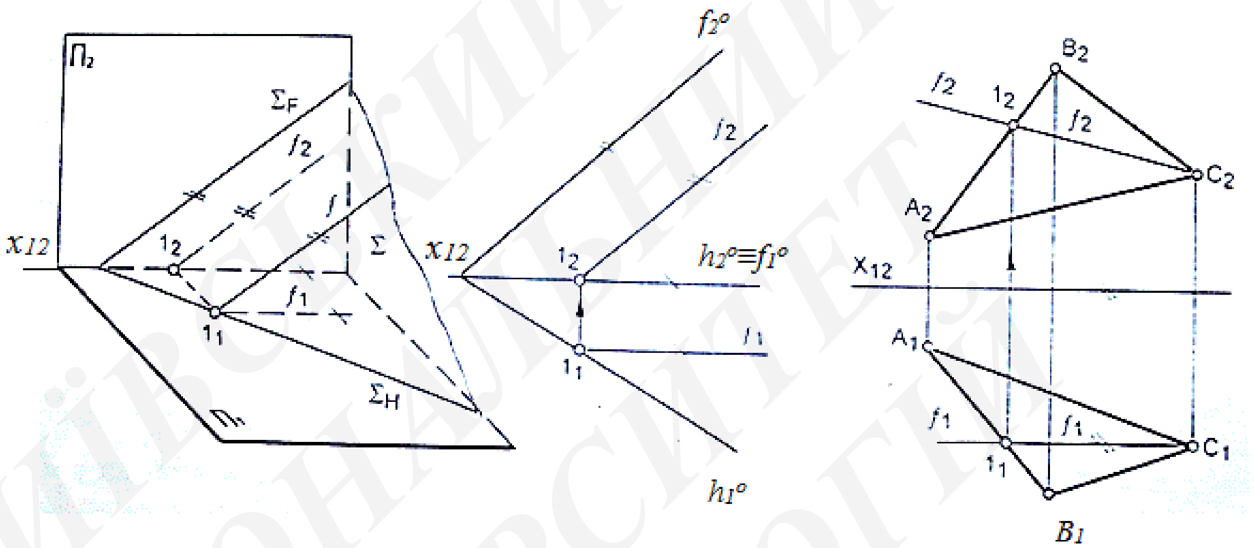
Усі горизонталі площини паралельні горизонтальному сліду – „*нульовій*” *горизонталі*.

На рис. 3.6, *в* розглянута побудова горизонталі площини, яка задана трикутним відсіком *ABC*. Горизонталь, це лінія площини, тому вона має пройти через дві точки цієї площини. Проводимо горизонталь через одну з точок відсіку так, що б ця лінія перетнула сторону трикутника.

Так як горизонталь площини є пряма, яка паралельна площині проекцій $П_1$, то фронтальну проекцію цієї прямої отримуємо, провівши $C_2 1_2$ паралельно осі проекцій x_{12} або, при відсутності осі проекцій, перпендикулярно до C_2C_1.

Для побудови горизонтальної проекції цієї горизонталі будуємо точку 1_1, за її відповідністю, та проводимо пряму через точки C_1 та 1_1.

Побудована пряма *C1* дійсно є горизонталлю площини: ця пряма належить площині, так як проходить через дві точки *C* та *1*, а вони як відомо належать площині, та паралельна площині проекцій $П_1$.



а *б* *в*

Рис. 3.7

Розглянемо побудову горизонталі площини, яка задана слідами h^0f^0. Горизонтальний слід площини є однією з її горизонталей („*нульова*” горизонталь). Тому побудова якої-небудь горизонталі зводиться до побудови в цій площині прямої, яка паралельна горизонтальному сліду площини (див. рис. 3.6, *б*). горизонтальна проекція h_1 горизонталі паралельна горизонтальному сліду h_1^o, а фронтальна проекція f_2 горизонталі паралельна горизонтальному сліду f_2^o площини.

Проекції фронталі розміщуються: горизонтальна h_1– паралельно осі проекцій x_{12} (рис. 3.7.); фронтальна f_2 – паралельно фронтальному сліду f_2^o (рис. 3.7, *а*, *б*).

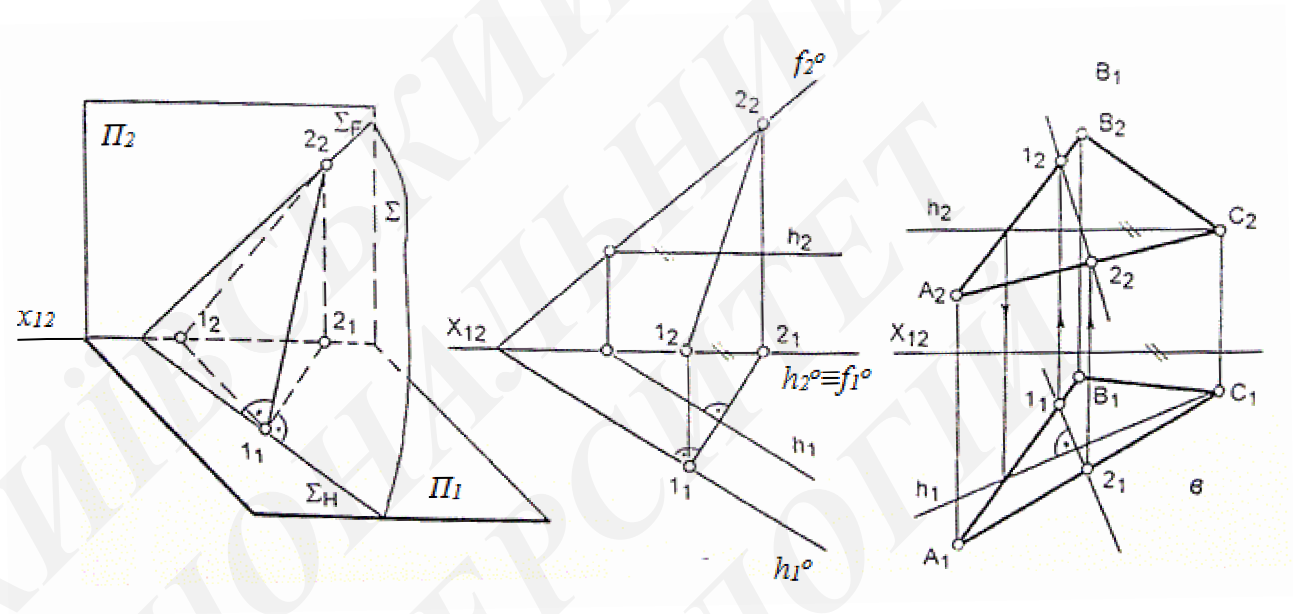
Побудова фронталі площини, яка задана трикутним відсіком *ABC* (див. рис. 3.7, *в*), та площини, яка задана слідами h^0f^0 (див. рис. 3.7, *б*), аналогічна побудові горизонталі.

Горизонталь *h* і фронталь *f* можуть замінити (по напрямку) відповідні сліди площини, яким вони паралельні. Тому їх часто використовуються замість слідів площини.

Лініями найбільшого нахилу площини до площин проекцій $П_1$, $П_2$ та $П_3$ називаються прямі, які належать площині та перпендикулярні або до горизонталей площини, або до фронталей площини, або до профільним прямим. В першому випадку визначається кут нахилу до площини проекцій $П_1$, в другому – до площини *П*$_2$, в третьому – до площини *П*$_3$. Для побудови ліній найбільшого нахилу площини, можна, за звичаєм, брати відповідні сліди.

На рис 3.8 представлена лінія найбільшого нахилу до горизонтальної площини проекції – *лінія скату площини*. Ця пряма є лінією стоку води.

Відповідно до властивості прямого кута (див. лекція 2, розділ 2.6.1) горизонтальна проекція лінії скату площини перпендикулярна до горизонтальної проекції цієї площини або до її горизонтального сліду.



а *б* *в*

Рис. 3.8

Фронтальна проекція лінії скату будується після горизонтальної і може займати різні положення в залежності від задання площини.

Лінія найбільшого нахилу площини служить для визначення кута нахилу площини (в якій вона лежить) з відповідною площиною проекцій.

Головні лінії площини

Запитання та завдання для самоконтролю:

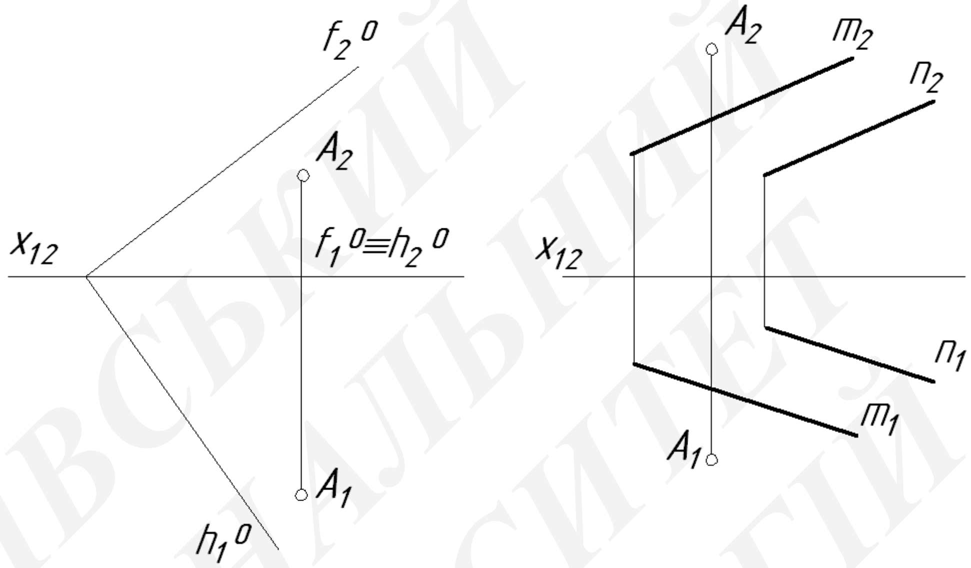
1. Як задається площина на комплексному кресленику?
2. Що таке слід площини?
3. Де розташована фронтальна проекція горизонтального сліду та горизонтальна проекція фронтального сліду?
4. Як визначити на кресленику, чи належить пряма площині?

5. Як побудувати точку, яка належить площині?

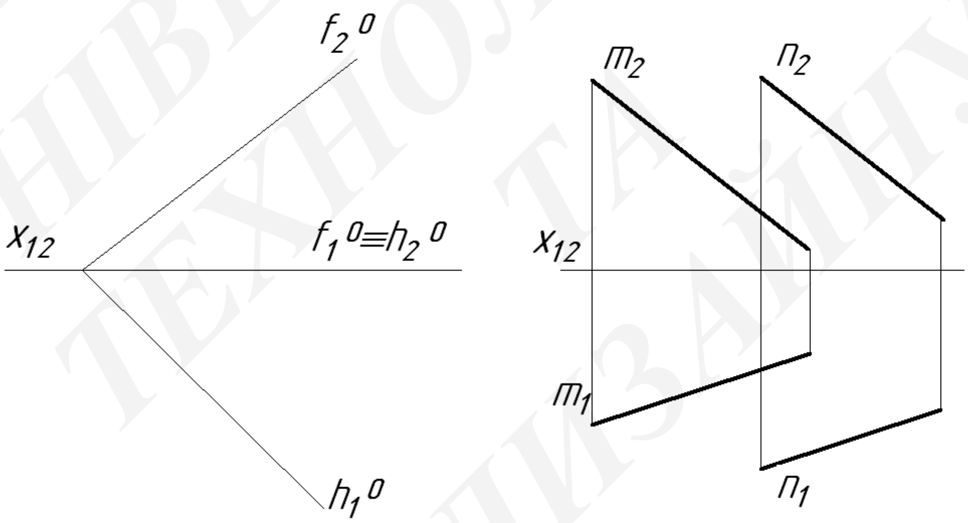
6. Що за лінія площини горизонталь, фронталь та лінія скату?

7. Чи можна використовувати лінію ската для визначення кута нахилу площини до площини проекцій $П_1$?

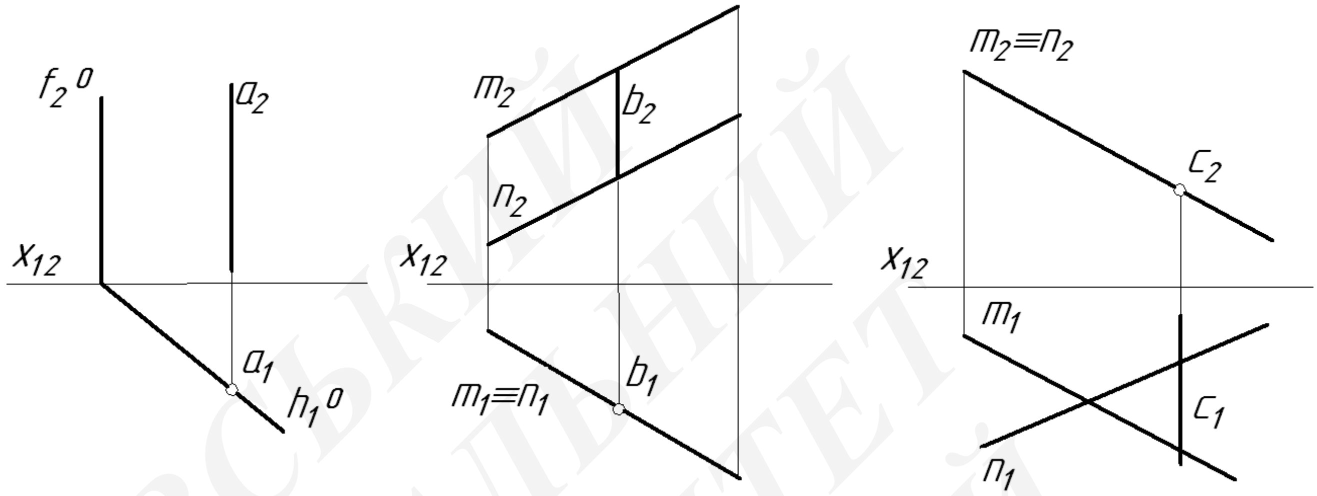
8. Провести через точку *A* пряму, яка належить площині.



9. В заданих площинах побудувати горизонталь, фронталь та лінію найбільшого скату.



10. Побудувати проекції другої площини, якщо відома їх лінія перетину.



Література по темі лекції:

[2] – с. 48-54, [9] – с. 19-18, [10] – с. 56-82.

ЛЕКЦІЯ 4

ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПЛОЩИНИ ТА ПРЯМОЇ. ВЗАЄМНЕ ПОЛОЖЕННЯ ПЛОЩИН. ПЕРЕТИН ДВОХ ПЛОЩИН

План лекції:

4.1. Пряма паралельна площині.

4.2. Пряма перпендикулярна до площині.

4.3. Взаємно паралельні площини.

4.4. Взаємно перпендикулярні площини.

4.5. Перетин прямих та площин з проекціювальними площинами.

4.6. Перетин прямих з площинами загального положення. Визначення видимості.

4.7. Взаємний перетин площин.

4.1. Пряма паралельна площині

З геометрії відомо: *пряма паралельна площині, якщо вона паралельна одній із прямих, яка лежить в цій площині.* Щоб провести пряму паралельну до площини необхідно: а) побудувати в площині довільну пряму, наприклад пряму *m*, яка належить площині *ABC*. Пряма *m* належить площині, тому що вона пройшла через дві точки цієї площини – точки *1-2* (рис. 4.1); б) провести пряму *n* паралельну до прямої *1-2* площини *ABC*.

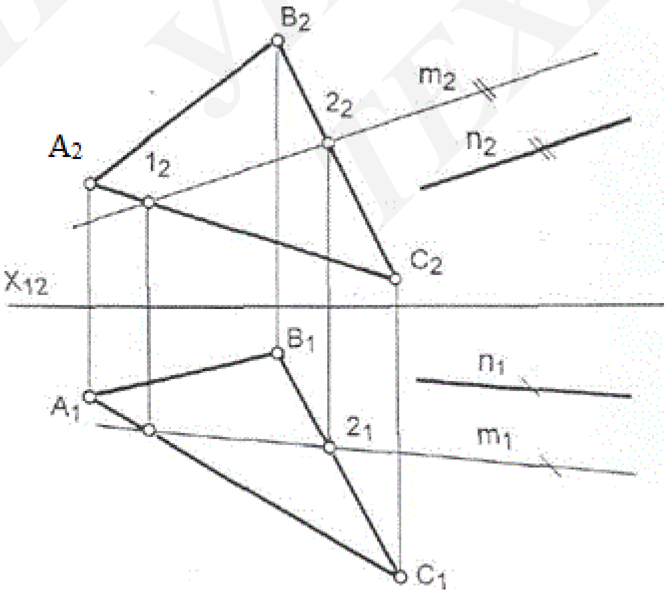


Рис. 4.1

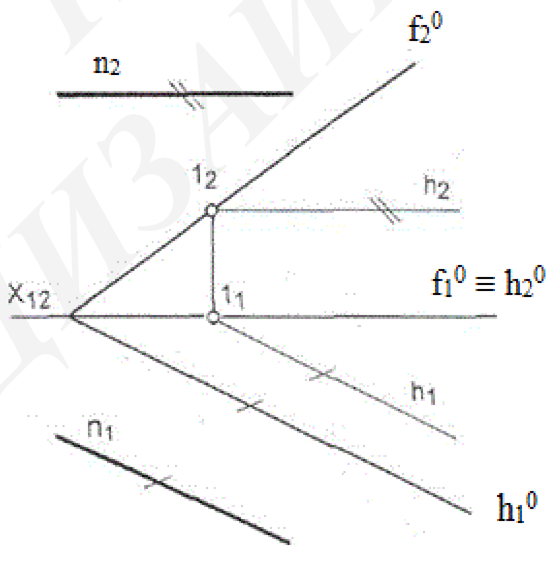


Рис. 4.2

При побудові прямої, паралельної до площини, можна використати головні лінії площини (рис. 4.2).

Як визначити що пряма паралельна площині?

Можна спробувати провести в цій площині деяку пряму, яка паралельна заданій прямій. Якщо таку пряму побудувати не можливо, то пряма і площина не паралельні од до одної.

Також можна спробувати знайти точку перетину даної прямої з даною площиною. Якщо така точка не може бути знайдена, то задані пряма і площина взаємно паралельні.

4.2. Пряма перпендикулярна до площини

Пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих цієї площини, які перетинаються.

На рис. 4.3 видно, що пряма *d* перпендикулярна до площини, так як вона перпендикулярна до *двох прямих m і n* цієї площини.

перпендикуляр до площини перпендикулярне до будь-якої прямій, яка проведена в цій площині. Але що при цьому проекція перпендикуляра до площини загального положення виявилася перпендикулярною до однойменної проекції будь-якій прямій цієї площини, пряма площини має бути *горизонталлю* або *фронталлю* площини. Тому при побудові прямої перпендикулярної до площини використовують *горизонталі* та *фронталі* площини, що з врахуванням умов проекціювання в натуральну величину прямого кута (*властивість прямого кута* – див. розділ 2.6.1. „Проекції прямого кута"), спрощує побудову.

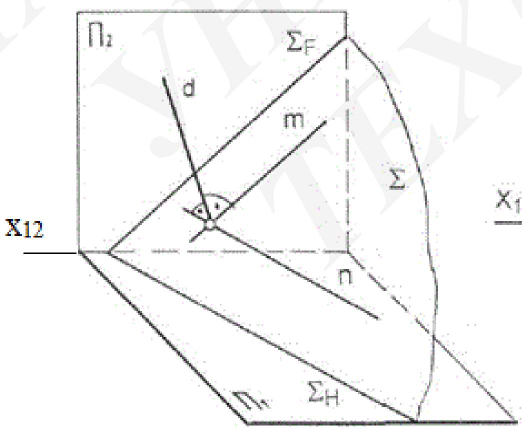


Рис. 4.3

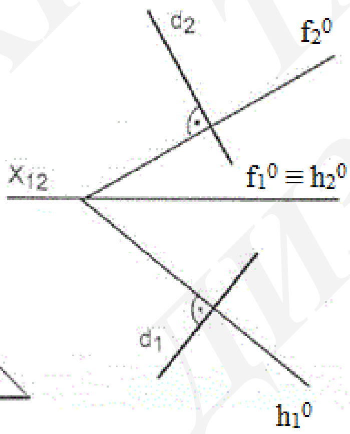


Рис. 4.4

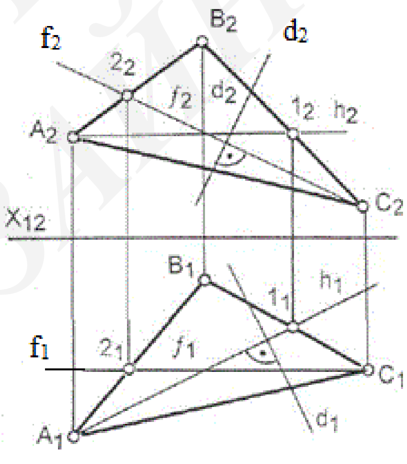


Рис. 4.5

З цього можна зробити висновок: *пряма лінія перпендикулярна площині, якщо її проекції перпендикулярні однойменним проекціям горизонталі та фронталі цієї площини* (h та f на рис. 4.5). Коли площина задана слідами (на рис.4.4), то пряма перпендикулярна площині, якщо горизонтальна проекція цієї прямої перпендикулярна до *горизонтального* h_1^0 *сліду площини,* а фронтальна проекція перпендикулярна до *фронтального* f_2^0 *сліду площини*.

Очевидно, що горизонтальна проекція перпендикуляра до площини збігається з горизонтальною проекцією лінії скату, яка проведена в площині через основу перпендикуляра.

4.3. Взаємно паралельні площини

З геометрії відомо:*дві площини паралельні, якщо дві прямі, які перетинаються однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються,іншої площини.*

Для проекціювальних площин достатньо, щоб проекції слідів їх на площинах, до яких вони перпендикулярні,були паралельними (рис. 4.6). Якщо площини задані слідами (рис. 4.7), то умовою їх паралельності буде паралельність однойменних слідів. Якщо хоча б одна пара слідів перетинається, то площини перетинаються між собою.

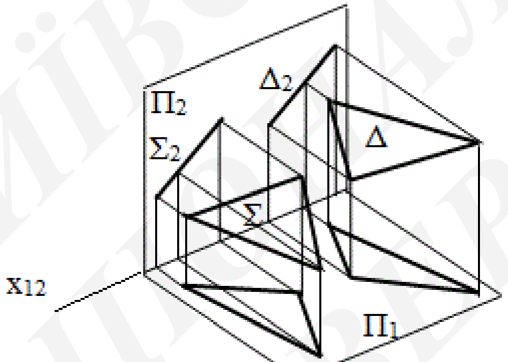


Рис. 4.6

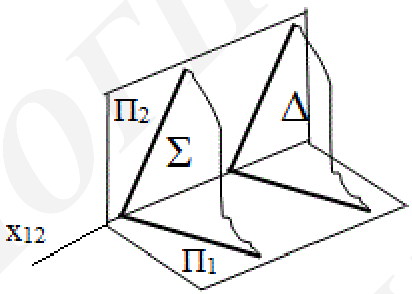


Рис. 4.7

На рис. 4.8 прямі *m* та *n* площини *Σ* відповідно паралельні прямим *а* та *в* площини Δ. В цьому випадку площина Δ паралельна площині *Σ*.

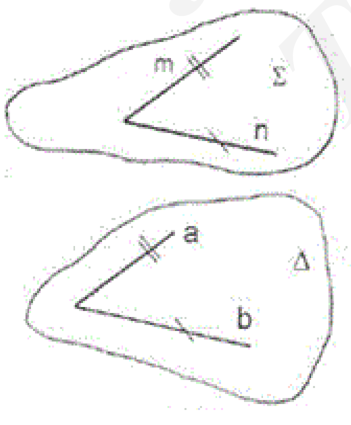


Рис. 4.8

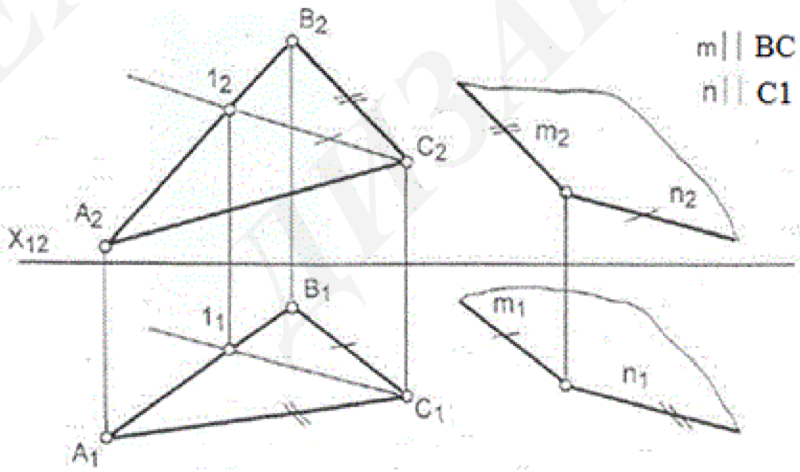
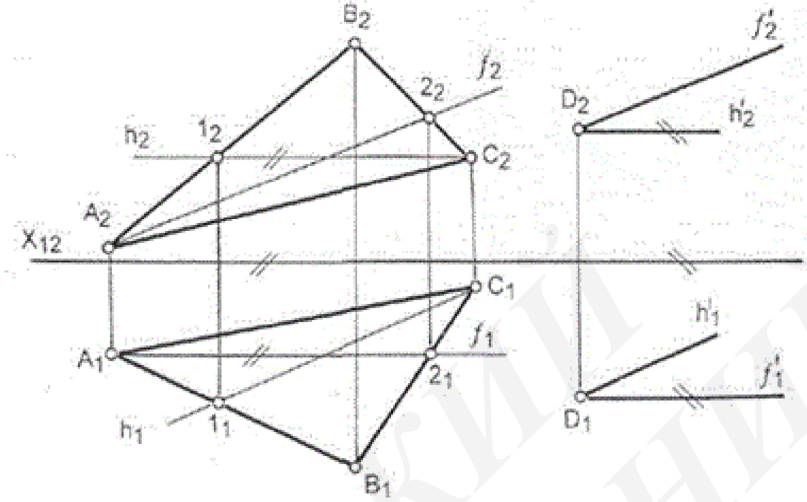


Рис. 4.9



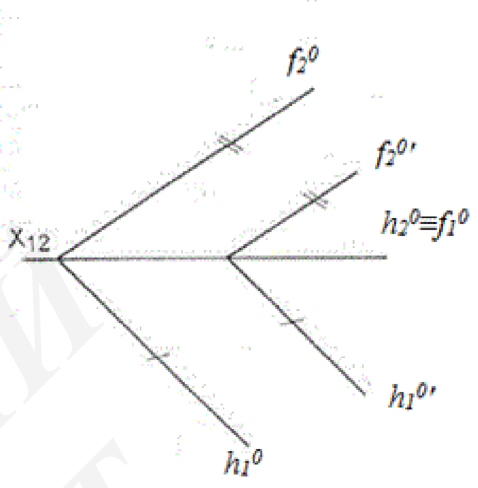


Рис. 4.10 **Рис. 4.11**

Для побудови площини паралельної інший площині, можна використати як довільні прямі площини (в трикутнику *ABC* прямі *BC* та *C1* на рис. 4.9), або фронталі f і горизонталі h площини (рис. 4.10), або сліди площин. На рис. 4.11 дві площини, які задані слідами –h^0f^0 та $f_2^{0\prime}h^{0\prime}$, паралельні, так як паралельні їх відповідні сліди.

4.4. Взаємно перпендикулярні площини

В елементарній геометрії є теорема; *дві площини взаємно перпендикулярні, якщо одна з площин має пряму лінію, яка перпендикулярна іншій площині.*

Для побудови площини перпендикулярної іншій площині, необхідно побудувати пряму перпендикулярну до цієї площини(див. рис. 4.3 - 4.5).

Побудова площини Δ, яка перпендикулярна до площини Σ, може бути виконана двома шляхами: 1) площина Σ проводиться через пряму, яка перпендикулярна до площини Σ; 2) площина Δ проводиться до прямої, яка належить площині Σ або паралельна цій площині.

Пряма *DC* на рис.4.12, яка перпендикулярна до площини Π_1, визначає безліч площин перпендикулярних до заданої площини. Для побудови однієї площини необхідно додаткові умови, наприклад, на рис. 4.12 площина Σ проходити через пряму *m*, а на площина Δ через точку *A*.

На рис. 4.13 побудовано пряму *d*, яка перпендикулярна до площини трикутника *ABC*. Провівши через точку *D* на перпендикулярі *d* довільну пряму *m,* визначимо площину $d \cap m$, яка перпендикулярна площині *ABC*.

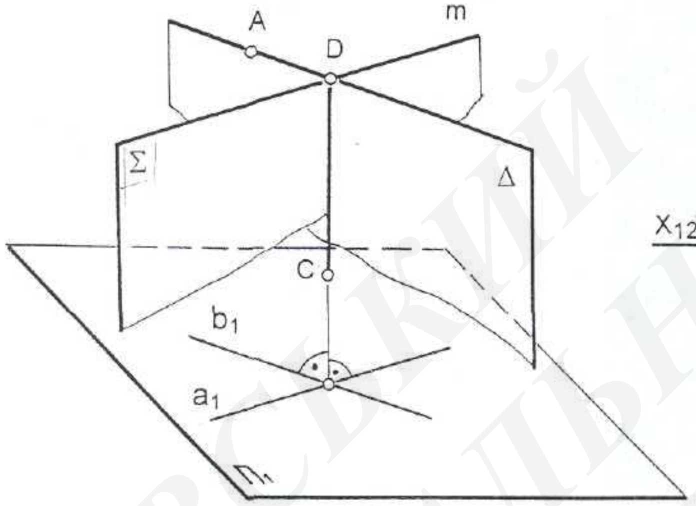


Рис. 4.12

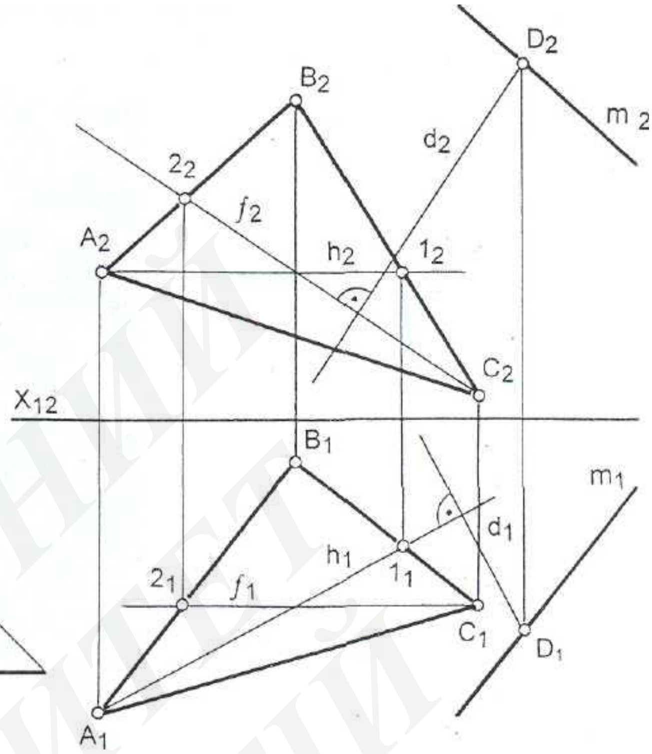
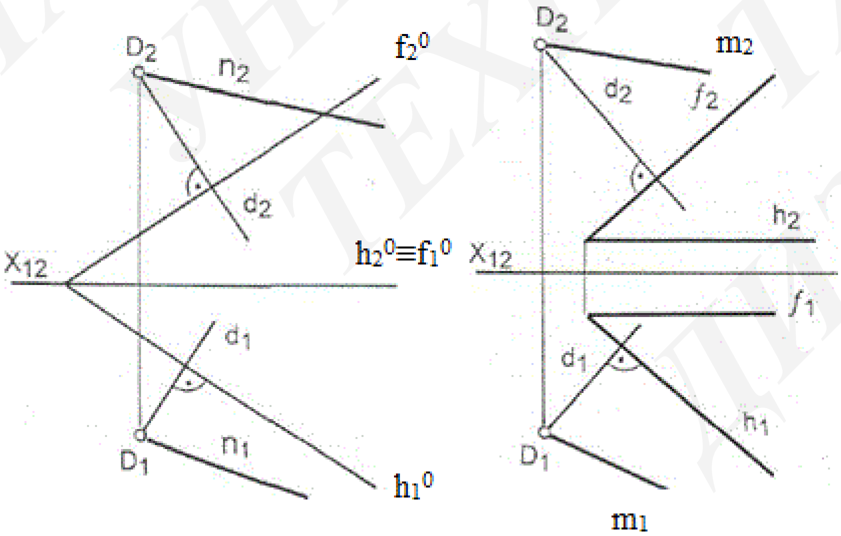


Рис. 4.13

На рис. 4.14, *а* виконана побудова площини,яка задана прямими $d \cap n = D$, перпендикулярно до заданої площини Σ ($h^0 f^0$), а на рис. 4.14, *б* виконана побудова площини, яка задана прямими $d \cap m = D$, перпендикулярно до заданої площини θ (hf)



а *б*

Рис. 4.14

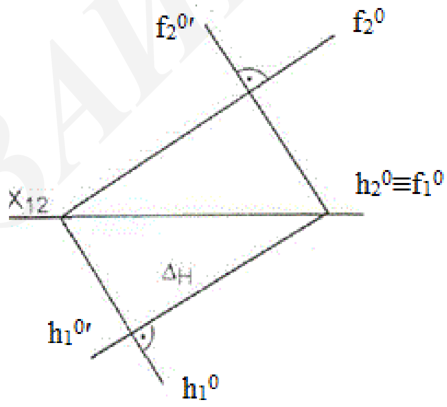


Рис. 4.15

Чи може перпендикулярність однойменних слідів площин визначати перпендикулярність самих площин?

До очевидних випадків, коли це так, відноситься взаємна перпендикулярність двох горизонтально проекціювальних, в яких горизонтальні сліди взаємно перпендикулярні. Це має місце при взаємній перпендикулярності фронтальних слідів фронтально проекціювальних площин – ці площини взаємно перпендикулярні.

Якщо одна площина проекціювальна (наприклад, горизонтально проекціювальна), а інша площина загального положення, то вони взаємно перпендикулярні, коли має місце перпендикулярність тільки двох однойменних слідів. В нашому прикладі: коли горизонтальний слід горизонтально проекціювальної площини перпендикулярне до горизонтального сліду площини загального положення, а фронтальні сліди площин розташовані під кутами відмінними від прямого, можна стверджувати що ці площини взаємно перпендикулярні.

Взаємне положення площин

На рис 4.15 наведено, що в*заємна перпендикулярність однойменних слідів двох площин не є ознакою їх перпендикулярності.*

4.5. Перетин прямих та площин з проекціювальними площинами

При розгляді проекціювальних площин виявлена важлива для них особливість: будь-який *геометричний образ, що знаходиться в проекціювальний площині, має одну із своїх проекцій на сліді цієї площини, тобто проекціюється в лінію.*

Ці властивості проекціювальних площин використовують при розв'язанні задач з побудови точок перетину прямих ліній з площинами та ліній перетину двох площин.

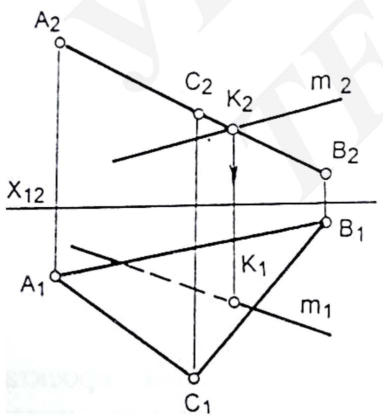


Рис. 4.16

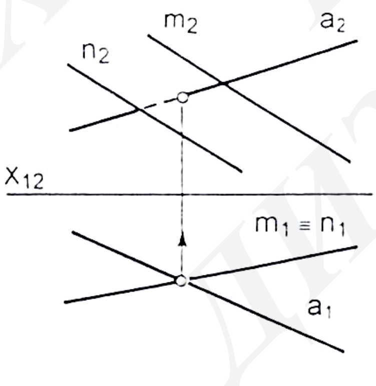


Рис. 4.17

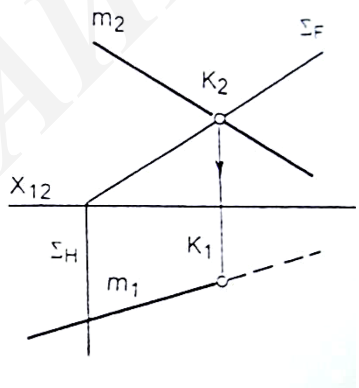


Рис. 4.18

Так як одна проекція точки перетину прямої з проекціювальною площиною знаходиться на сліді площини, інша проекція точки визначається як лінія перетину іншої проекції прямої з лінією проекціювального зв'язку, яка проведена через першу проекцію точки (точка *К* на рис. 4.16 - 4.18).

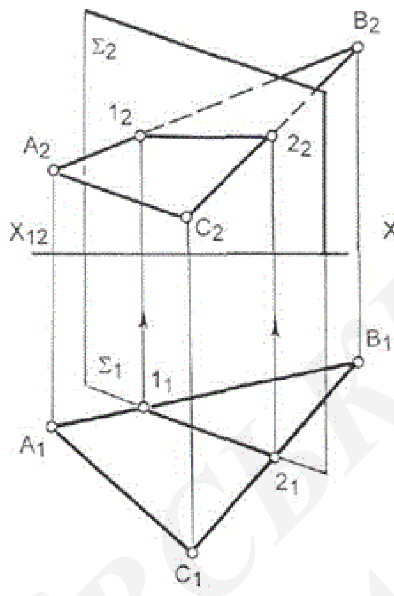


Рис. 4.19

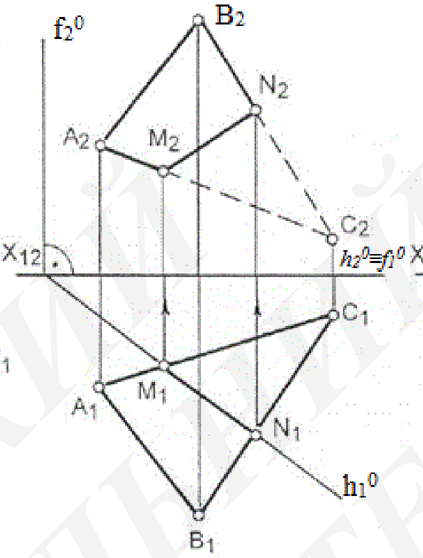


Рис. 4.20

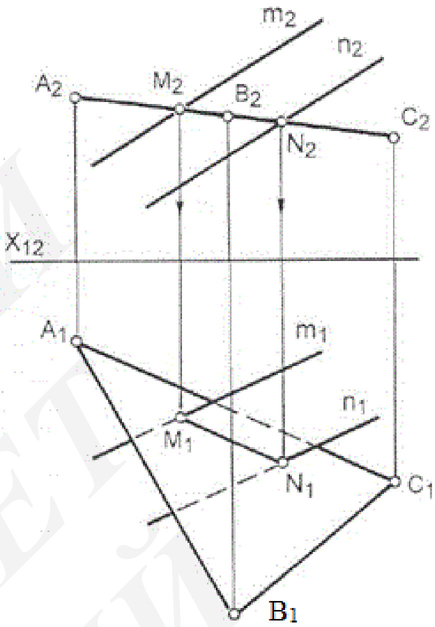


Рис. 4.21

Загально відомо, що *дві площини перетинаються по прямій лінії, яка визначається двома точками*.

Для побудови лінії перетину площин необхідно визначити точки перетину двох прямих ліній площини загального положення з проекціювальною площиною.

На рис. 4.19 побудована лінія перетину двох площин: трикутний відсік *ABC* та площина *Σ*, одна з них *Σ* – горизонтально проекціювальна. Горизонтальна проекція 1_1-2_1 лінії перетину відома, залишається побудувати її другу проекцію з використанням властивості належності точки прямій.

На рис. 4.20 представлена побудова лінію перетину горизонтально проекціювальної площини h^0f^0 з площиною загального положення *ABC*, а на 4.21 – побудова лінії перетину фронтально проекціювальної площини *ABC* з площиною загального положення $m//n$. В цих прикладах визначають лінію перетину двох площин – пряму *MN*.

З розглянутих прикладів можна зробити висновок: *одна з проекцій лінії перетину площини загального положення з проекціювальною площиною збігається зі слідом проекціювальної площини, а інша проекція будується за належністю точок відповідним прямим.*

Цю властивість проекціювальних площин використовують при розв’язанні задач на перетин двох геометричних образів, які розташовані в просторі в загальному положенні.

4.6. Перетин прямих з площинами загального положення. Визначення видимості

Для побудови точки перетину прямої з площиною використовують *площину-посередник,* який проводиться через пряму. Іноді зустрічається термін – *пряму заключають в площину*. Алгоритм побудови буде мати наступний вид:

1. Через пряму m (рис. 4.22, 4.23) проводиться допоміжна проекцію вальна площина-посередник Σ.

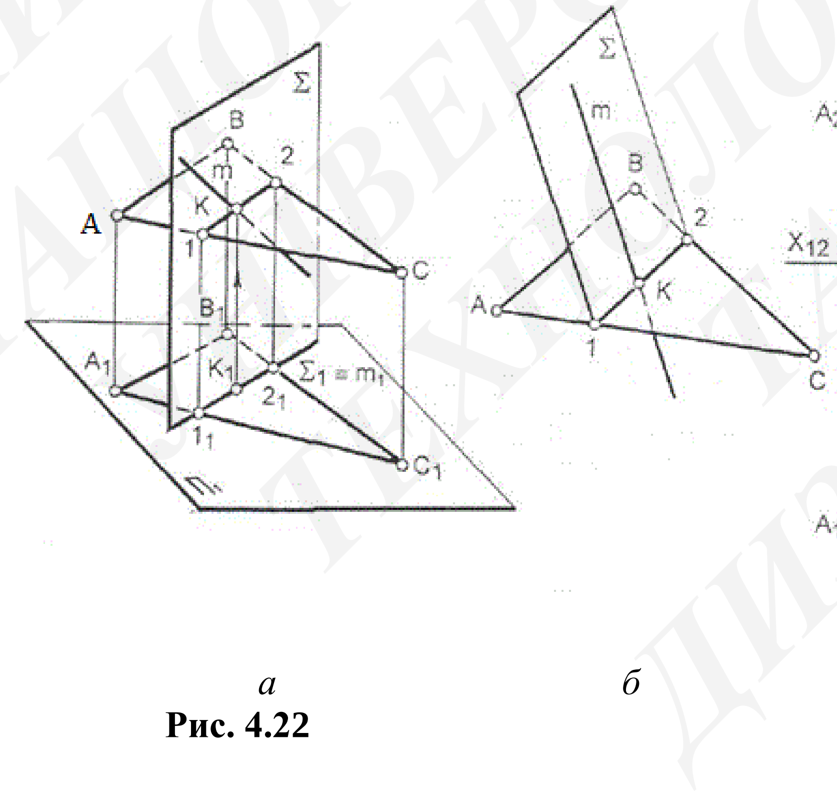
2. Визначається лінія *1-2* перетину *площини-посередника* Σ *з заданою площиною*.

3. Точка перетину побудованої лінії *1-2* з заданою прямою m і буде шукана точка перетину прямої з площиною.

Площина-посередник вибирається так, щоб побудова розміщувалась в межах рисунку.

Точка K може знаходитись за межами контуру відсіку площини або не в першій чверті.

На рис. 4.22 та рис. 4.23 площина задана трикутним відсіком ABC, а на рис. 4.24 – слідами. На рис. 4.20 другий слід площини-посередника не використовується.



а *б*

Рис. 4.22

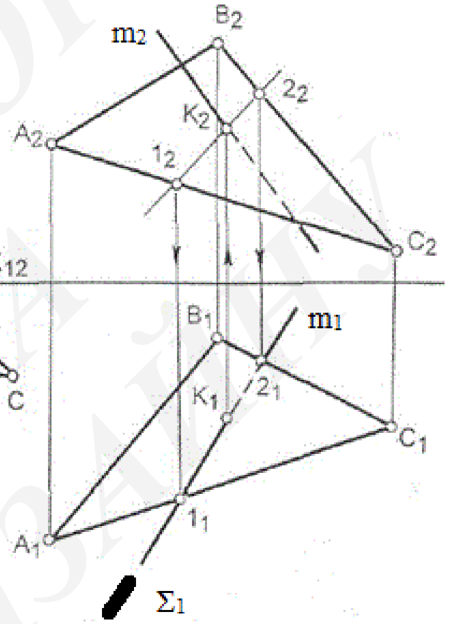
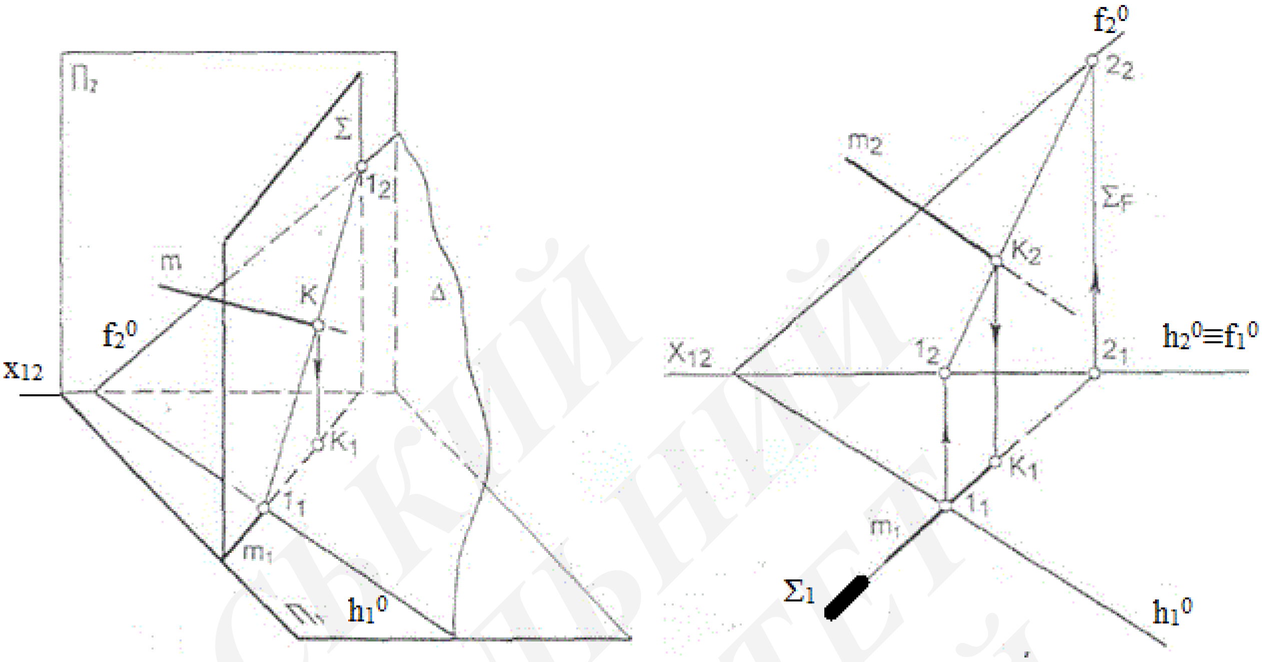


Рис. 4.23



а *б*

Рис. 4.24

Застосування в ролі посередників площин рівня або проекціювальних є типовим і самим розповсюдженим прийомом при рішенні задач на побудову лінії перетину двох геометричних образів.

Повертаючись до розділу 4.2. „Пряма перпендикулярна до площини”, можна тему на перетин площини прямою використовувати для розв’язання деяких метричних задач.

Так як перпендикуляр до площини перпендикулярний до кожної прямої, яка проведена в цій площині, то, навчившись проводити площину перпендикулярно до прямої, можна скористуватися цим для проведення перпендикуляра з деякої точки *A* до прямої загального положення *m*.

Очевидно, можна намітити наступний план побудови проекції деякої прямої (див. рис. 4.25):

1) через точку *A* провести площину (назвемо її θ) перпендикулярно до *m*. Ця площина задана лініями рівня;

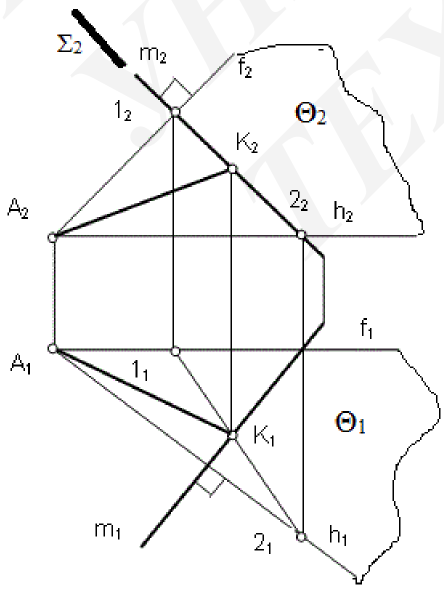


Рис. 4.25

2) визначимо точку К перетину прямої m з площиною θ, використовуючи допоміжну січну площину Σ (площину-посередник);

3) сполучити точки A та K відрізком прямої лінії. Прямі AK та m взаємно перпендикулярні.

При потребі можна визначити дійсну величину відстані від точки до прямої (спосіб прямокутного трикутника).

Перетин прямої з площиною

4.7. Взаємний перетин площин

Дві площини перетинаються по *прямій лінії* (див розділ 4.5). *Тому лінію перетину площин загального положення визначають по точкам перетину двох прямих однієї площини з другою площиною.*

Допустимо і друге рішення – перетин прямої першої площини з другою площиною та перетин прямої другої площини з площиною першої.

Отже, щоб знайти лінію перетину площин необхідно визначити дві точки спільні для них.

При побудові лінії перетину площин використаємо допоміжні (посередники) січні площини, як правило, проекціювальні.

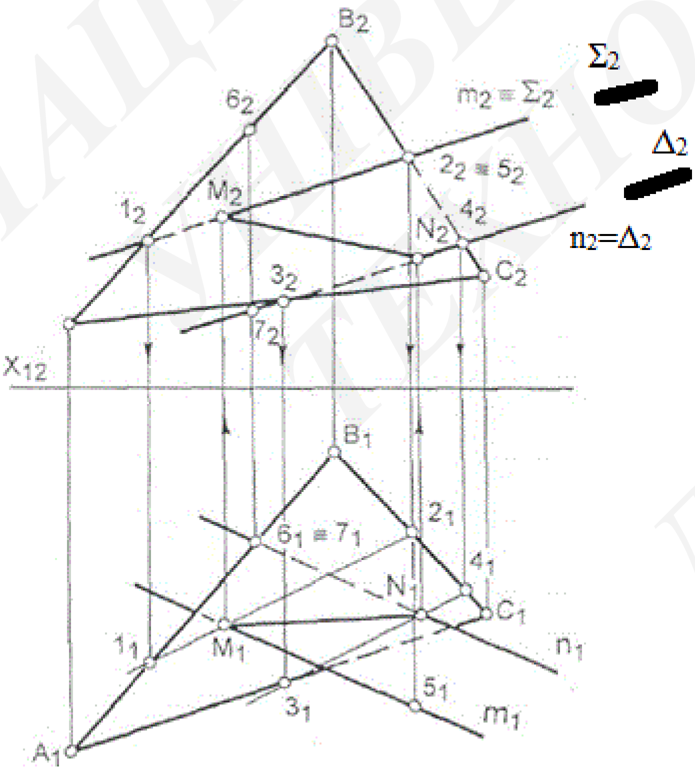


Рис. 4.26

Для побудови точки перетину прямої m з площиною ABC (рис. 4.26), через пряму проведено допоміжну фронтально проекціювальну січну площину Σ ($\Sigma \perp \Pi_2$). Лінія *1-2* – лінія перетину площини Σ з площиною ABC. Горизонтальна проекція лінії перетину площин 1_1-2_1 в перетині з горизонтальною проекцією прямої m_1 визначить точку M_1 – точку перетину прямої m з площиною ABC, як так спільну точку для двох площин. Фронтальна проекція M_2 будується за належністю точки прямій.

При побудові точки перетину прямої n з площиною ABC через пряму n проведена допоміжна фронтально проекціювальна січна площина Δ ($\Delta \perp \Pi_2$).

Пряма *3-4*є лінією перетину площини Δ та *ABC*. Побудова проекцій N_1 та N_2 точки перетину прямої *n* з площиною *ABC* аналогічна побудові проекцій точки *M*. З'єднавши однойменні проекції точок *M* та *N* прямими, отримаємо шукані проекції лінії перетину заданих площин ($MN = ABC \cap mn$).

Для визначення видимості елементів на проекціях використовують конкуруючі точки (див. рис. 2.12). Так, для визначення видимості елементів площин на площині проекцій $П_2$ використані конкуруючі точки *2* та *5*, які належать відповідно прямим *BC* та *m*. Відносно площини проекцій $П_1$, використані конкуруючі точки *6* та *7* які належать відповідно прямим *AB* та *n.*

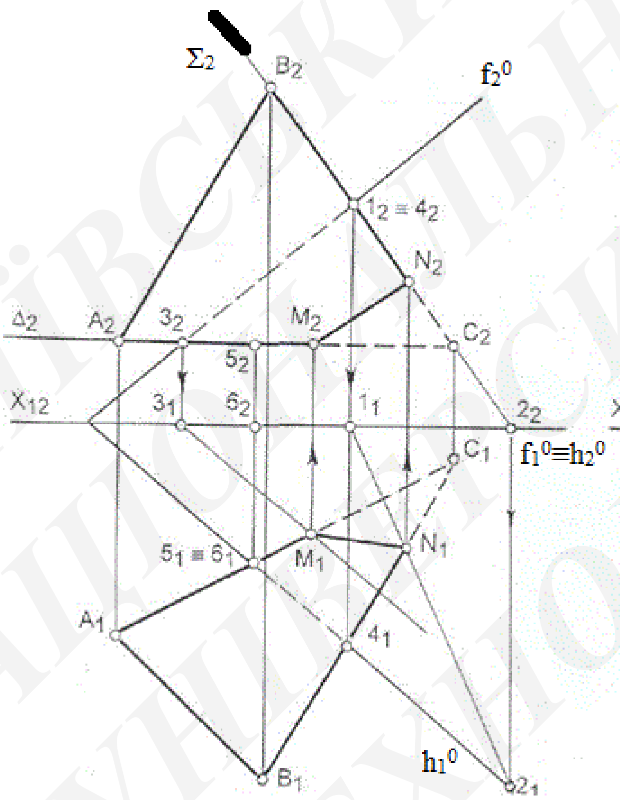


Рис. 4.27

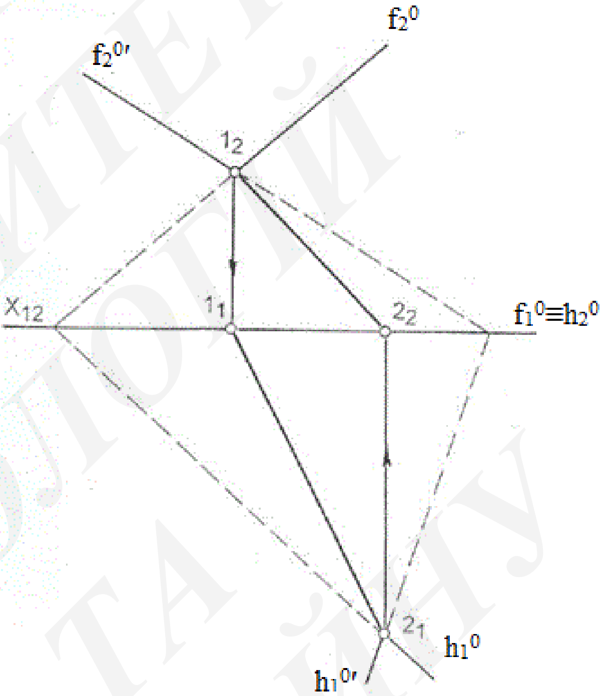


Рис. 4.28

На рис. 4.27 одна із площин задана своїми слідами, друга – трикутним відсіком. Побудова лінії перетину площин аналогічна побудовам виконаним на рис. 4.26. Для побудови точки перетину прямої *BC* з площиною *P* використана площина-посередник – фронтально проекціювальна площина *Σ*, яка проведена через пряму *BC*. Через пряму *AC* проведена фронтально проекціювальна площина Δ. Побудовані точки *M* та *N* перетину відповідних прямих *BC* та *AC* з площиною визначають лінію перетину площин.

Якщо площини задані на площинах проекцій своїми слідами, то точки які визначають лінію перетину площини будуть точками перетину однойменних слідів (рис. 4.28). Пряма лінія яка з'єднує ці точки буде спільною для обох площин , а значить і лінією перетину площин.

Перетин двох площин заданих в загальному виді (не слідами) є однією із основних задач і розв’язується по загальному алгоритму для любого випадку перетину двох геометричних образів.

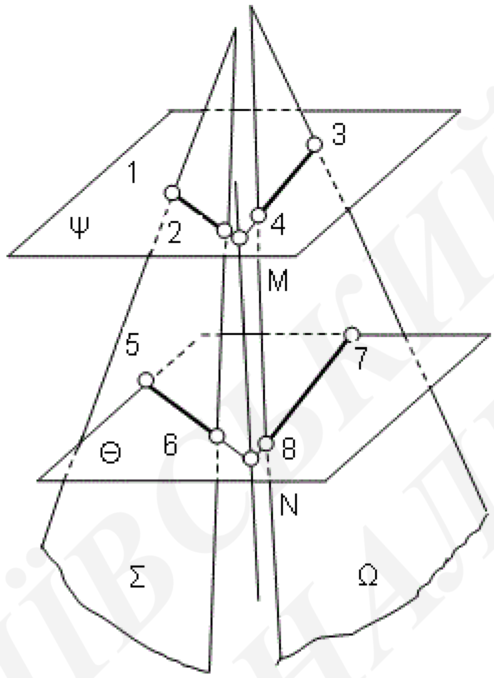


Рис. 4.29

Розглянемо просторовий рисунок (рис. 4. 29) двох площин Σ і Ω загального положення. Побудуємо додаткову проекціювальну площину Ψ. Визначимо лінії перетину цієї додаткової площини з кожною заданою. Це будуть прямі *1-2* та *3-4*, які визначать одну точку *M*, яка належить шуканій лінії перетину. Щоб знайти іншу точку лінії перетину, слід побудувати ще одну додаткову проекціювальну площину Θ, визначити лінії перетину цієї другої додаткової площини з заданими. Це будуть прямі *5-6* та *7-8*, які визначать іншу точку *N*, яка належить шуканій лінії перетину. Цим алгоритмом і користуються для побудови лінії перетину двох площин загального положення на комплексному рисунку.

На рис. 4.30 задані площини $AB//CD$ та $m \cap n$. Їх перетинаються площиною-посередником – фронтально проекціювальною площиною Σ. Визначають лінію перетину з кожною площиною окремо. Лінія *1-2* – це перетин площини $AB//CD$ допоміжною січною площиною Σ_2, а лінія *3-4*, перетин площини $m \cap n$ січною площиноюΣ_2.

Точка M_1, точка перетину побудованих ліній *1-2* і *3-4* між собою, буде належати шуканій лінії перетину площин.

За допомогою другої такої ж площини Δ аналогічно визначається друга точка N_1. Лінія 5-6 є лінія перетину площини $AB//CD$ допоміжною січною площиною Δ_2, а лінія 7-8 – перетин площини $m \cap n$ січною площиною Δ_2.

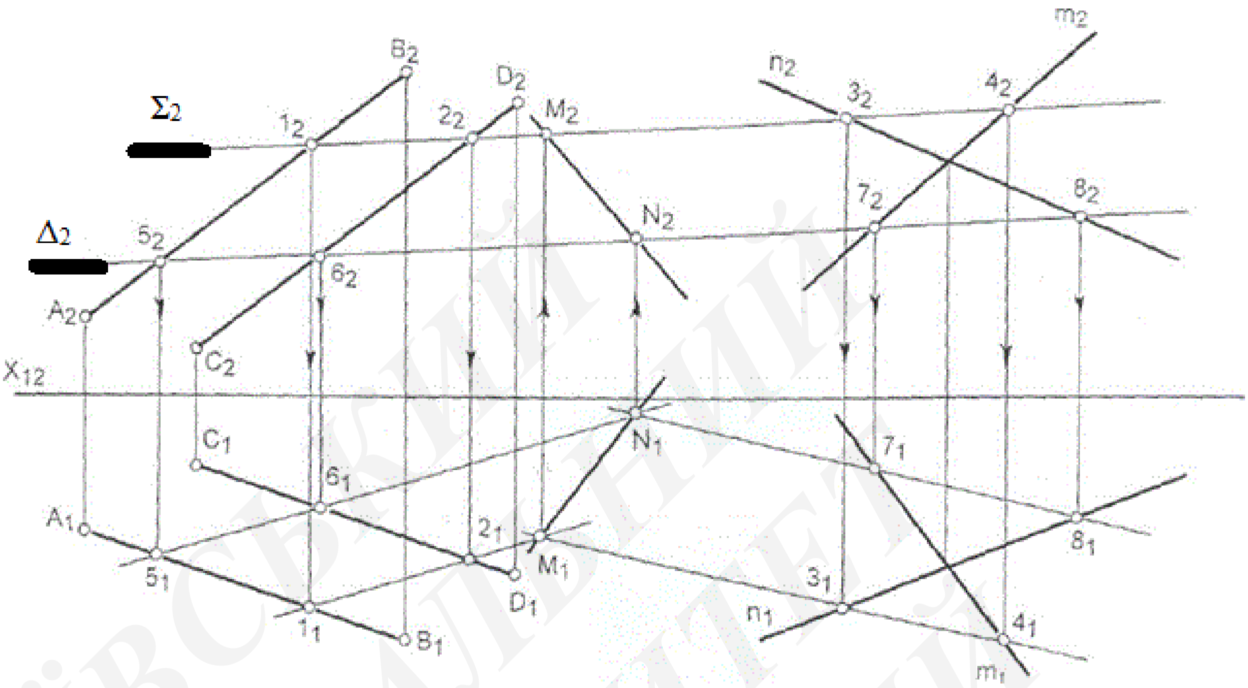


Рис. 4.30

Перетин горизонтальних проекцій прямих 1_1-2_1 та 3_1-4_1 визначає точку *M*, яка буде належати шуканій лінії перетину площин.

А пряма *MN* – шукана лінія перетину площин *AB*//*CD* та $m \cap n$.

Для розв’язанні задачі на перетин площин в загальному виді доцільно вибирати площини посередники в виді паралельних площин, що спрощує побудову. Якщо січні площини паралельні, то паралельні їх сліди.

Побудова лінії перетину двох площин

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

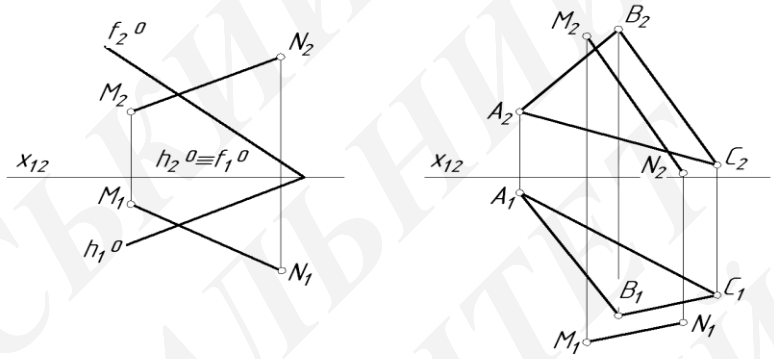
1. Як побудувати площину паралельну заданій прямій?
2. Як побудувати дві паралельні площини?
3. Як провести перпендикуляр з точки на пряму загального положення за допомогою площини, яка перпендикулярна до прямої?
4. В яких випадках взаємна перпендикулярність однієї пари однойменних слідів площин відповідає взаємній перпендикулярності самих площин?
5. Чи перпендикулярні площини загального положення одна до одної, якщо однойменні сліди взаємно перпендикулярні?
6. В якій послідовності визначається точка перетину прямої з площиною?

7. За допомогою чого можна визначити видимість прямої на площинах проекцій?

8. Як визначити проекції лінії перетину двох площин?

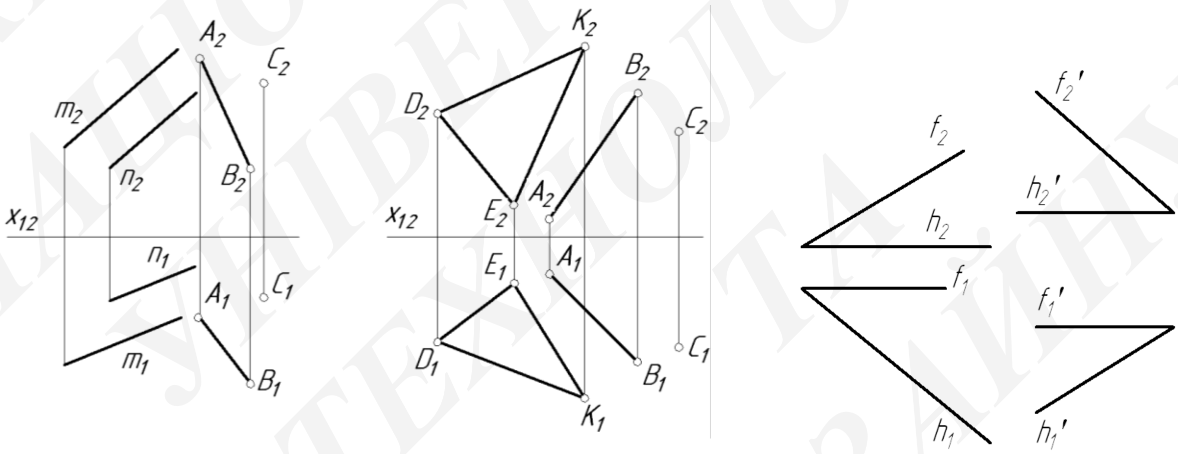
9. За допомогою чого можна визначити видимість елементів на площинах проекцій?

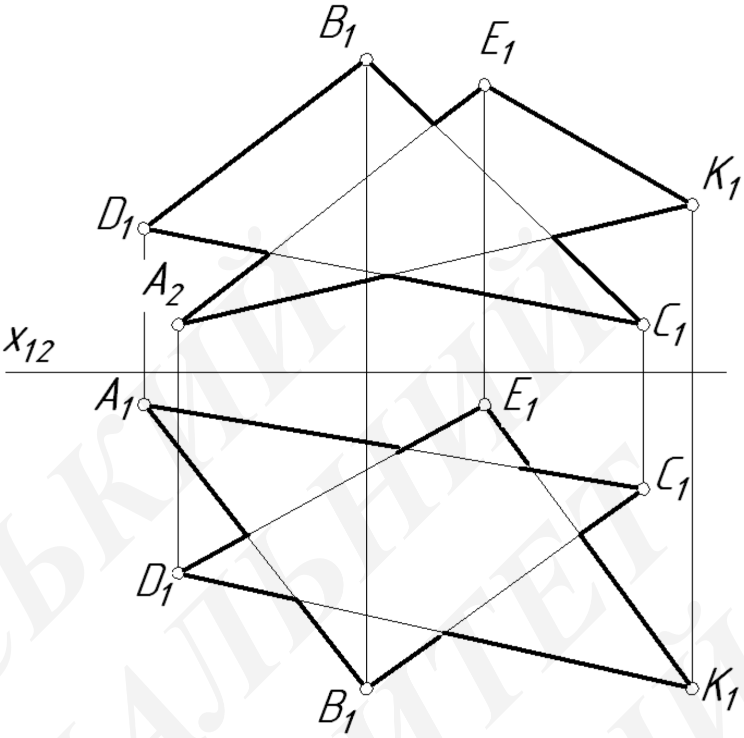
10. Через точку *C* провести пряму, яка перетинала б відрізок *AB* і залишалась паралельною заданій площині.



11. Через пряму *MN* провести площину перпендикулярну до заданої.

12. Побудувати лінію перетину площин. Визначити видимість.





Література по темі лекції:

[2] – с. 57-60, [10] – с. 82-92.

ЛЕКЦІЯ 5

СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ. СПОСІБ ОБЕРТАННЯ

<u>План лекції</u>:

5.1. Загальні положення.

5.2. Спосіб обертання навколо прямих, які перпендикулярні площинам проекцій.

5.3. Плоско-паралельне переміщення.

5.1. Загальні положення

Для розв'язання ряду задач, переважно метричних, доцільно заданий об'єкт привести в особливе положення з тим, щоб на одній із нових проекцій отримати більш просте рішення поставленої задачі або саме рішення задачі.

Побудову нових, додаткових проекцій, при заданих проекціях об'єкта, називають *перетворенням комплексного креслення.*

Перетворення виконують такими способами:

1. Спосіб обертання (повороту) навколо проекціювальних осей.
2. Спосіб плоско-паралельного переміщення.
3. Спосіб обертання навколо ліній рівня.
4. Спосіб заміни площин проекцій.
5. Спосіб косокутного проекціювання.

5.2.Спосіб обертання (повороту) навколо прямих, які перпендикулярні площинам проекцій

В просторі точка A (рис. 5.1) повертається і окреслює коло, яке лежить в *площині обертання* (площина Π на рис.5.1). Ця площина перпендикулярна до осі i обертання.

Частіше, за вісь обертання обирають *прямі особливого положення*: перпендикулярні, паралельні площинам проекцій або які належать їм.

Розглянемо обертання точки A навколо осі, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій Π_1 (див. рис. 5.2). В цьому випадку точка A обертається по колу, радіус якого на горизонтальну площину проекцій проекціюється натуральною величиною. Маючи натуральну величину радіуса обертання точки A, можна побудувати її зміщені проекції – $\overline{A}_1$ та $\overline{\overline{A}}_1$.

Горизонтальні проекції переміщуються по дузі кола, а фронтальні $\overline{A}_2$ та $\overline{\overline{A}}_2$ по горизонтальній прямій Σ_2 – сліду площини переміщення (обертання)точки A.

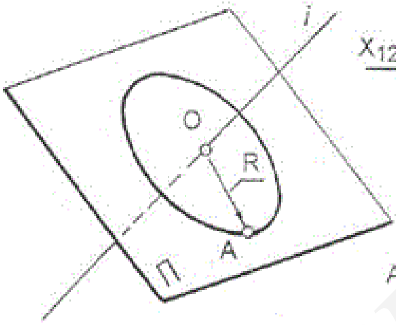


Рис. 5.1

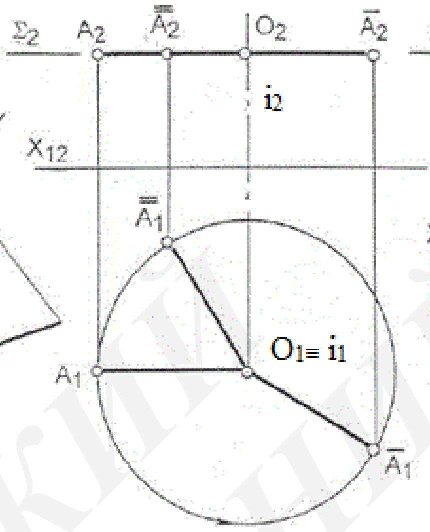


Рис. 5.2

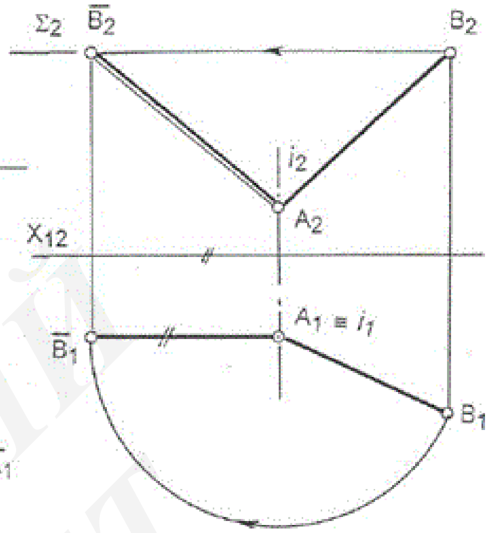


Рис. 5.3

Вибір осі обертання, яка перпендикулярна до площини проекцій в значній мірі спрощує побудову, так як при цьому площина обертання буде паралельна площині проекцій.

Відрізок AB обертається навколо горизонтально проекціювальної прямої, яка проходить через точку A (рис.5.3). Проекції точки A (A_1; A_2) залишаються нерухомими.

Решта точок відрізка AB переміщується по колах відповідних радіусів до положення, коли відрізок AB буде паралельним до фронтальної площини проекцій $П_2$. Переміщене положення точки B на фронтальній площині проекцій буде визначено точкою перетину проекціювальної лінії зв'язку, яка проходить через точку $\overline{B}_1$ зі слідом площини обертання (проекція $\overline{B}_1$).

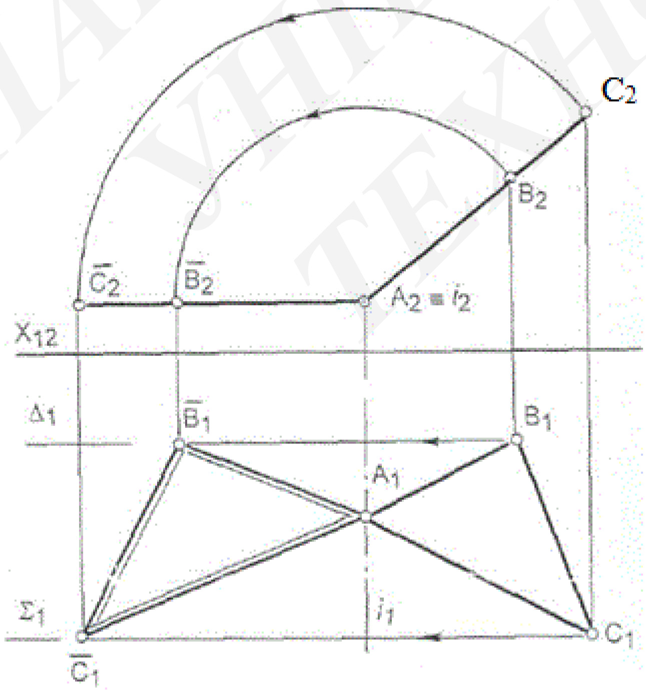


Рис. 5.4

Сполучивши точки A_2 та $\overline{B}_2$ одержимо проекцію відрізка AB рівну його натуральній величині. Кут між натуральною величиною відрізка та горизонтальною прямою буде дорівнювати натуральній величині кута нахилу відрізка до площини проекцій $П_1$.

На рис. 5.4 відсік ABC заданий фронтально-проекціювальним. За вісь повороту вибрана фронтально проекціювальна пряма l, яка проходить через точку A.

В загальному випадку при повороті геометричної фігури, кожна точка її має свою площину повороту. Площини повороту точок *B* і *C* перпендикулярні до осі повороту, а центр радіуса повороту знаходиться на осі. При повороті точки B_2 і C_2 описують дуги на площині Π_2 відповідних радіусів (A_2B_2 та A_2C_2). На горизонтальній площині проекцій переміщуються по фронтальним прямим – слідам площин обертання Δ_2 та Σ_2. Точки перетину ліній проекціювального зв'язку, які проходять через точки $\overline{B}_2$ та $\overline{C}_2$, зі слідами відповідних площин Δ_2 та Σ_2, визначать зміщені положення точок *B* і *C*. Сполучивши зміщені положення проекцій точок $\overline{B}_1$ та $\overline{C}_1$ з проекцією точки A_1 – визначимо трикутник, який і буде натуральною величиною трикутного відсіку *ABC*.

В деяких випадках поворот геометричної фігури навколо однієї осі не дає очікуваного результату. В цьому випадку виникає потреба в використанні декількох осей повороту.

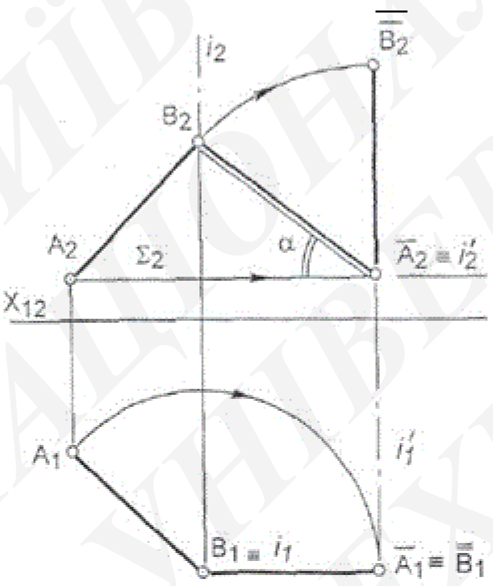


Рис. 5.5

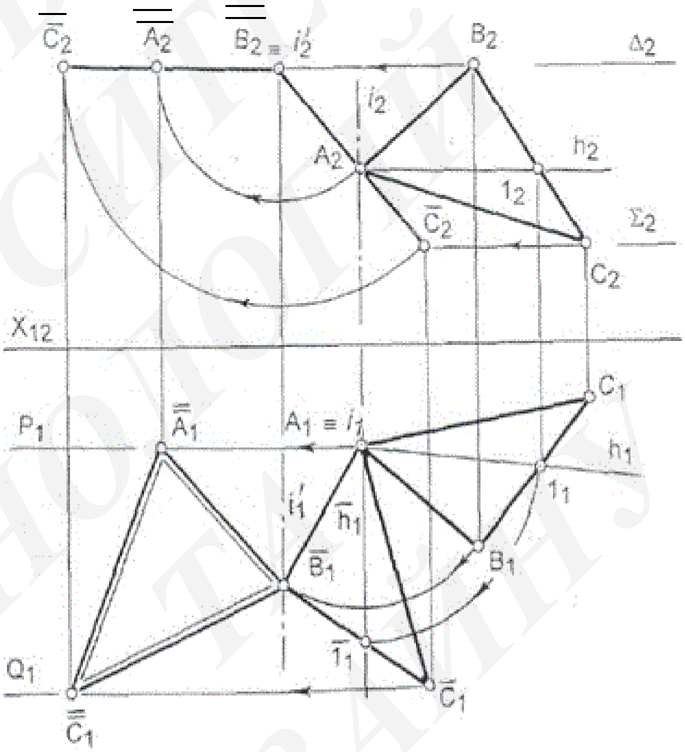


Рис. 5.6

Так, на рис. 5.5. відрізок *AB* обернуто навколо вертикальної осі *í* до фронтального положення $B_1\overline{A}_1$. Потім той же відрізок з нового положення повороту навколо осі *í'*, яка перпендикулярна площині Π_2, приведено в горизонтально проекціювальне положення – $\overline{\overline{B}}_2\overline{A}_2$.

В першому випадку визначена натуральна величина відрізка *AB*, в другому – він на горизонтальній площині проекційΠ_1 проекціюється в точку, тому що займає горизонтально проекціювальне положення.

На рис. 5.6 способом повороту навколо проекціювальних осей, вирішені дві задачі: перша – визначено кут нахилу площини трикутника *ABC* до горизонтальної площини проекцій Π_1 (кут α); друга – визначено натуральну величину трикутного відсіку *ABC*.

Спочатку трикутник приводиться в фронтально проекціювальне положення поворотом навколо осі *і*, яка перпендикулярна площині проекцій Π_1. Для цього в трикутнику *АВС* додатково будується горизонталь *А-1*. Трикутник обертається так, щоб побудова на горизонталь розмістилася перпендикулярно до площини Π_2. Тоді її горизонтальна проекція A_1-1_1 (h_1) займе положення перпендикулярне до осі проекційx_{12} і визначить нову горизонтальну проекцію трикутника – $\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$. Нова фронтальна проекція його проекціюється в відрізок $\bar{\bar{B}}_2 A_2 \bar{C}_2$, а його кут нахилу до осі x_{12} і визначить кут нахилу площини трикутника до площини проекцій Π_1.

Далі поворотом з нового положення навколо осіi_2, яка перпендикулярна до площини проекцій Π_2, трикутник приводиться в друге положення, в якому він розташований паралельно площині проекцій Π_1. Тоді його нова фронтальна проекція $\bar{\bar{C}}_2\bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{B}}_2$ розміститься паралельно осі проекцій, а нова горизонтальна проекція $\bar{\bar{C}}_1\bar{\bar{A}}_1\bar{B}_1$визначить його натуральну величину.

З цього прикладу можна зробити висновок, що *приведення плоскої фігури загального положення в положення площини рівня, повертаючи навколо проекціювальних осей, можливо тільки дворазовим обертанням, привівши її спочатку в положенні перпендикулярне (проекціювальне) іншій площині проекцій.*

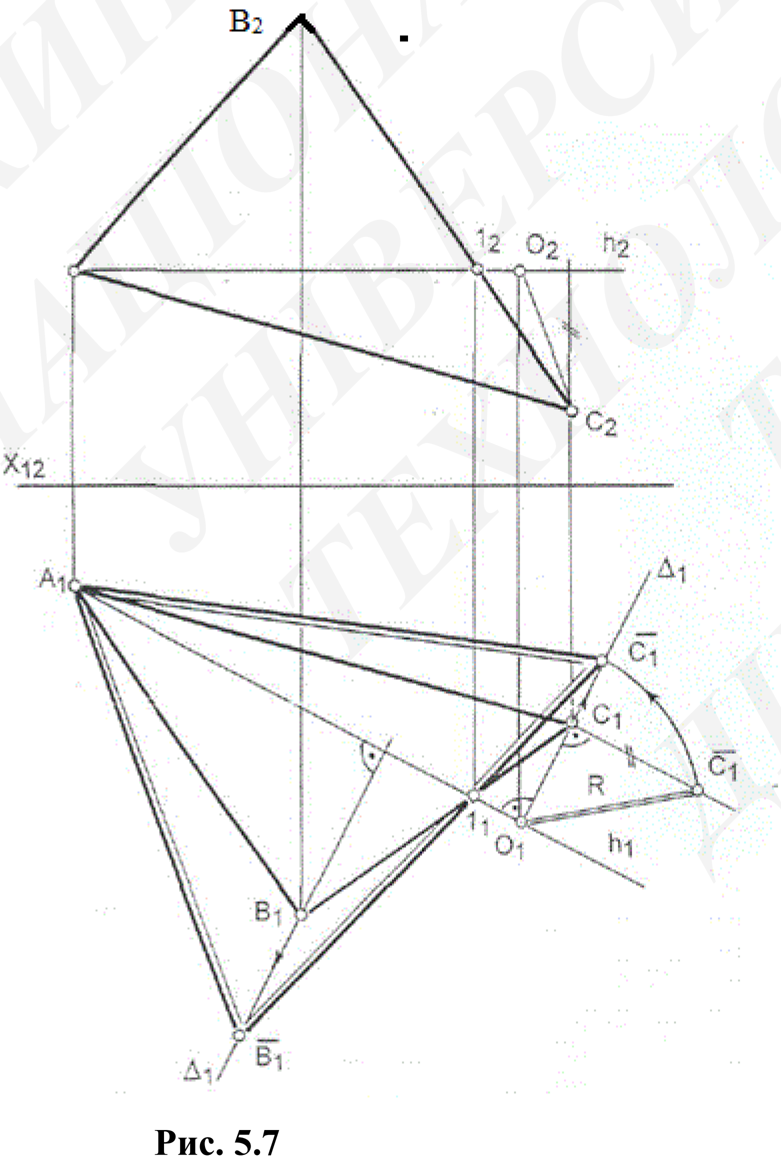


Рис. 5.7

Якщо за вісь повороту взяти *лінію рівня,* то плоску фігуру трикутника можна одноразовим поворотом привести в положення, коли фігура паралельна площині проекцій, для чого достатньо привести в ту ж площину рівня одну з точок фігури.

На рис. 5.7. визначена натуральна величина трикутника *АВС* обертанням навколо горизонталі *А-1*. Точка *С* обертається навколо горизонталі, а горизонтальна проекція C_1 буде переміщуватись по перпендикуляру до A_1-1_1 – по сліду Σ_1 площини повороту.

Кінцеве положення точки $\bar{C}_1$ буде віддалене від осі повороту *A-1* на відстань, яка дорівнюється натуральній величині радіуса повороту *OC*. Її визначають способом прямокутного трикутника (див. рис.2.7). Визначивши цю відстань і відклавши її від центра O_1 на лінію переміщення точки C_1, отримаємо нову горизонтальну проекцію $\overline{C}_1$ точки *C*.

Переміщене положення точки *B* може бути визначеним по аналогії з визначення переміщеного положення точки *C*. На рисунку переміщене положення точки *B* визначено за належністю точки *B* прямій $\overline{C}_1$-1_1-$\overline{B}_1$. Проекція $\overline{B}_1$ визначена як точка перетину сліду Δ_1 – площини, в якій обертається точкаBвідносногоризонталіC_1-1_1.

Обертання навколо прямої, яка лежить в площині проекцій, інколи називають *суміщенням,* так як в цьому випадку плоску фігуру можна сумістити з площиною проекцій.

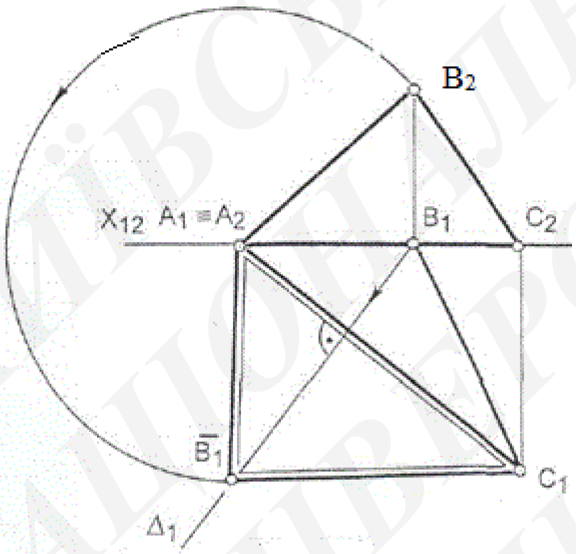


Рис. 5.8

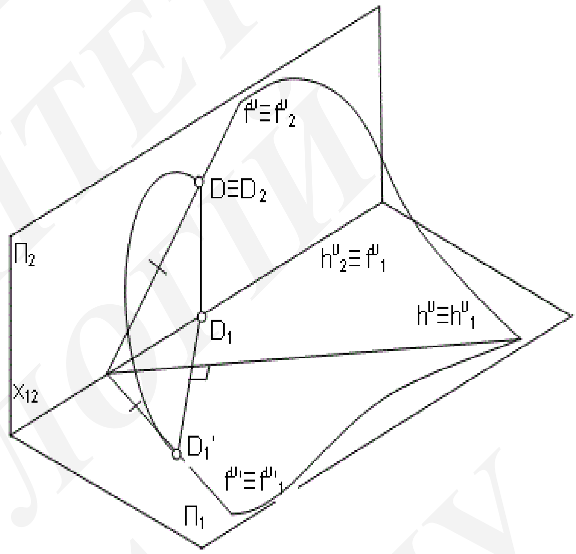


Рис. 5.9

На рис. 5.8 задано трикутник *ABC*, сторони якого збігаються з площинами проекцій, а саме: *AC* – з площиною $П_1$, а *AB* – з площиною $П_2$. Поворотом навколо сторони A_1C_1 трикутник суміщають з площиною $П_1$. В цьому випадку нема необхідності визначати, як на рис. 5.7 натуральну величину радіуса повороту точки *B*, так як відстань $A_1\overline{B}_1$ дорівнює A_2B_2. Тому точка $\overline{B}_1$знаходиться на перпендикулярі $B_1\overline{B}_1$ до осі обертання A_1C_1. Точка $\overline{B}_1$ визначена як точка перетину лінії переміщення точки *B* з дугою радіуса A_2B_2 з центром в точці A_1.

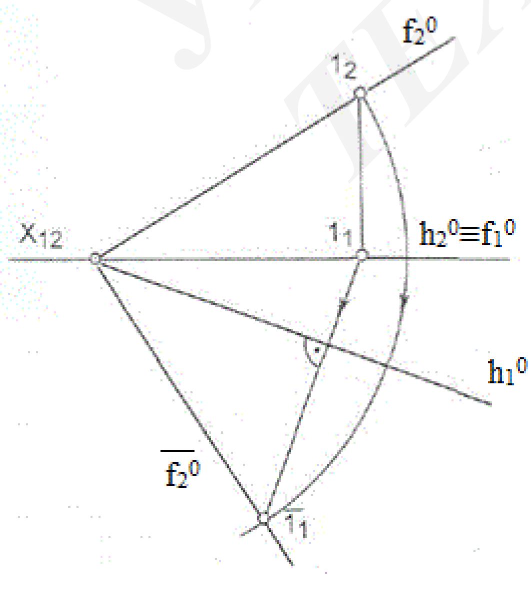
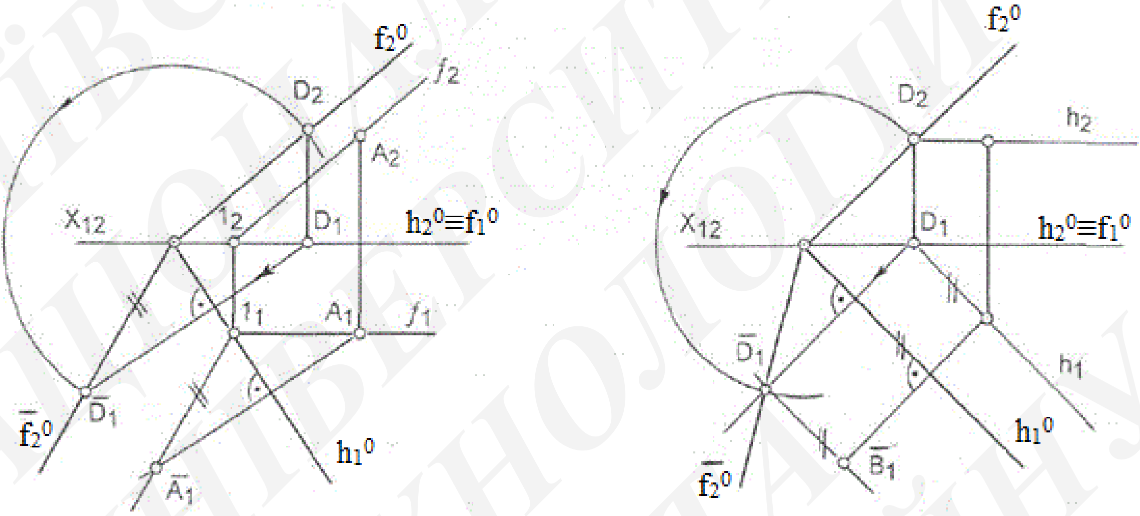


Рис. 5.10

На рис. 5.9. показано наочне зображення, а на рис. 5.10 побудову суміщеного фронтального сліду f_1^0 на комплексному кресленику. на фронтальному сліді f_2^0 вибираємо довільну точку 1_2. Горизонтальну проекцію 1_1 визначаємо за її відповідністю. З визначеної точки проводимо перпендикуляр до горизонтального сліду h_1^0. Перетин перпендикуляра з дугою, центр якої визначається перетином слідів, визначить суміщену проекцію точки $\bar{1}_1$.

Побудова суміщеного сліду площини використовується для побудови суміщеного положення прямих і точок, які належать цій площині: при рішенні задач на визначення натуральних величин фігур, плоских кутів, розгорток поверхонь.

На рис. 5.11, *а* визначено суміщене положення точки *А* за допомогою фронталі *f*, яка в суміщеному положенні буде паралельна суміщеному положенні сліду $\bar{f}_2^0$. На рис 5.10, *б* суміщене положення точки *D* виконано за допомогою горизонталі *h*. В обох випадках побудова суміщеного сліду $\bar{f}_2^0$ обов'язкове.



а *б*

Рис. 5.11

Інколи необхідно визначити проекції точок (об'єкта) по їх суміщеному положенню, що називається *відновленням в просторі.* На рис. 5.11 суміщений слід $\bar{f}_2^0$ відновлений в просторі наступним чином. Довільна точка $\bar{D}_1$ взята на суміщеному сліді $\bar{f}_2^0$. Після відновлення горизонтальна проекція цієї точки D_1 буде розміщуватися на перпендикулярі $\bar{D}_1D_1$ до сліду і на осі проекційx_{12}.

Фронтальна проекція D_2 знаходиться на лінії проекціювального зв'язку D_1D_2 і на відстані $\bar{f}_2^0D_2=\bar{f}_2^0\bar{D}_1$.

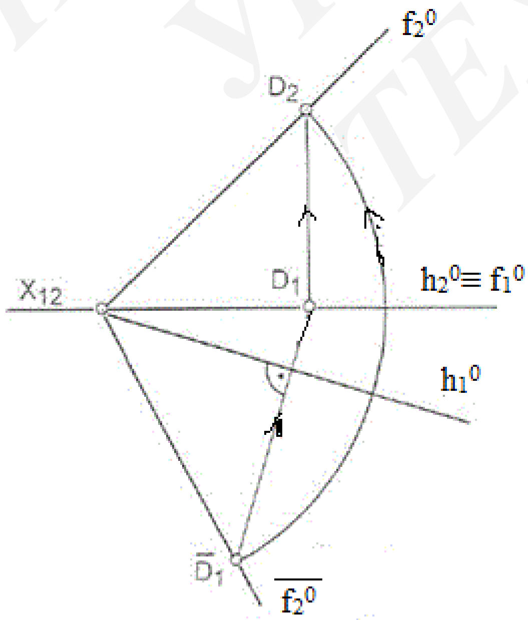
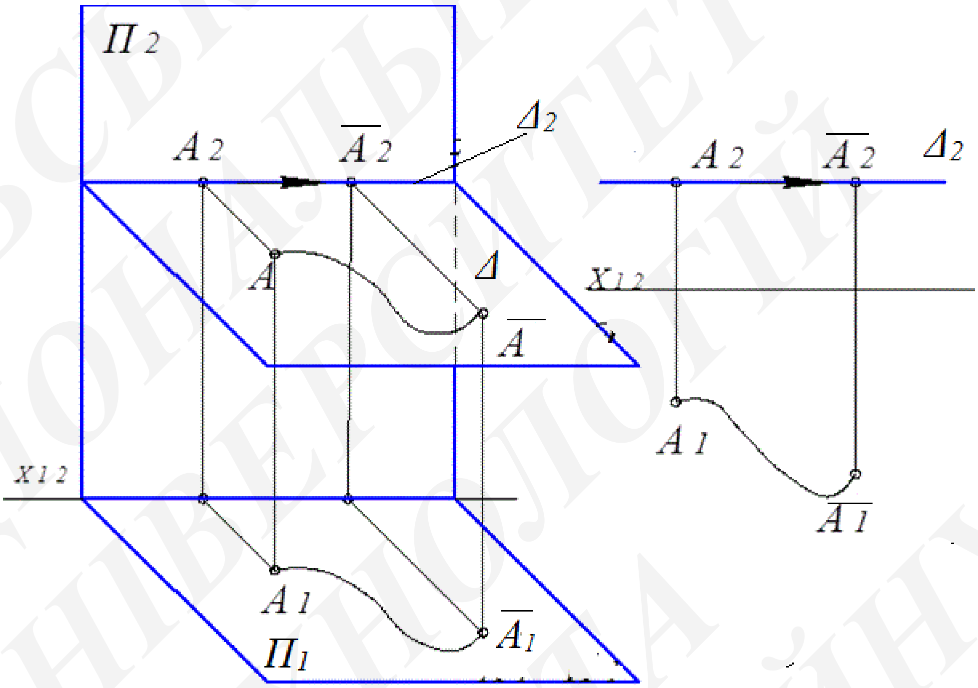


Рис. 5.12

5.3. Плоско-паралельне переміщення

Плоско-паралельне переміщення можна розглядати як обертання навколо „*невиявлених*” осей. Всі точки геометричного образу при цьому переміщуються у взаємно паралельних площинах.

Плоско-паралельне переміщення (див. рис. 5.13) – *це переміщення, при якому одна з проекцій геометричного образа, без зміни форм та розмірів, переміщується паралельно одній з площин проекцій, другі проекції точок геометричного образа переміщуються по прямим лініям, які паралельні осі проекцій.* На рис. 5.13, *а* представлена просторова ілюстрація правила, а на рис. 5.13, *б* – приклад плоско-паралельного переміщення на комплексному кресленику.



а *б*

Рис. 5.13

Користуючись цим положенням, можна застосовувати відомий спосіб обертання не задаючи вісь обертання та не визначаючи радіуси обертання точок.

Розмістимо горизонтальну проекцію A_1B_1 паралельно осі x_{12} не змінюючи її величини (рис. 5.14), тобто $\bar{A}_1\bar{B}_1 = A_1B_1$. Точки A та B рухаються в площинах Σ та Δ ,які паралельні площині проекцій $П_1$. Фронтальні проекції A_2 та B_2 переміщуються по прямим лініям, які паралельні осі проекцій x_{12}. Нові фронтальні проекції $\bar{A}_2$ і $\bar{B}_2$ визначаються як точки перетину ліній проекціювального зв’язку цих точок, з фронтальними слідами (горизонтальними прямими) площин Σ та Δ. Сполучивши отримані проекції точок прямою лінією, визначимо натуральну величину відрізка AB. Кут між натуральною величиною відрізка та горизонтальною прямою визначає натуральну величину кута нахилу прямої до площини проекцій $П_1$ (кут α).

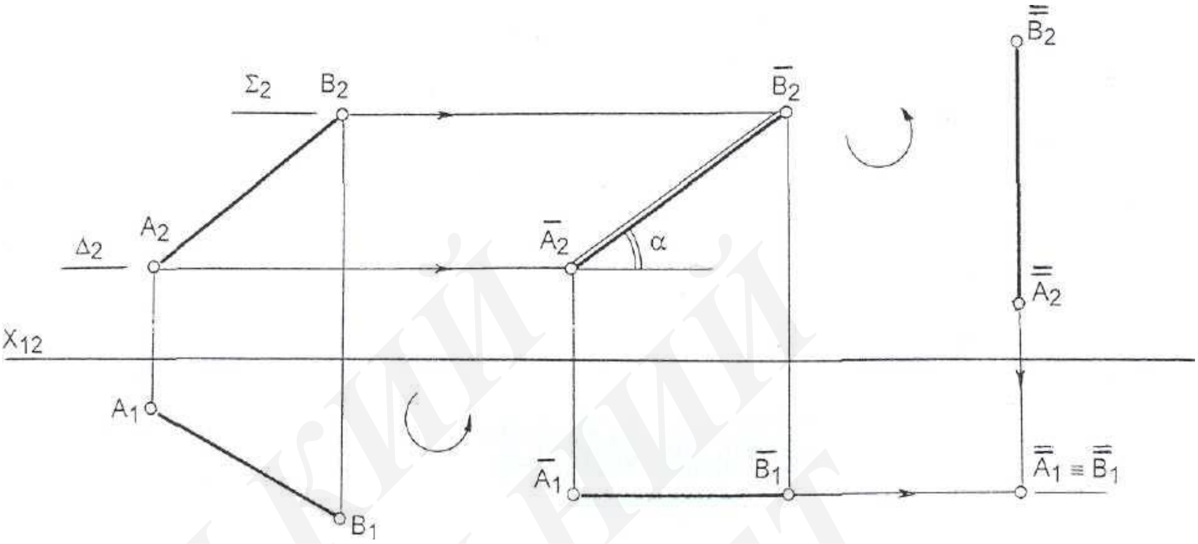


Рис. 5.14

Перемістивши нову фронтальну проекцію $\bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{B}}_2$ в положення перпендикулярне до осі x_{12}, визначимо горизонтальну проекцію $\bar{\bar{B}}_1\equiv\bar{\bar{A}}_1$. Таким чином переведемо пряму *AB* в проекціювальне положення відносно площини проекцій Π_1, тобто визначимо проекцію прямої яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекції.

Відомо, *що відстань між паралельними прямими проекціюється в натуральну величину при умові перпендикулярності цих прямих до площини проекцій.*

На рис. 5.15 розглянуто визначення відстані між паралельними прямими *AB* і *CD*. Послідовним переміщенням (див. рис. 5.14), не змінюючи розміри, приведемо прямі *AB* і *CD* в проекціювальне положення. Для цього не змінюючи взаємного положення та розмірів переміщують проекції прямих до горизонтального положення проекції $\bar{A}_2\bar{B}_2$ та $\bar{C}_2\bar{D}_2$.

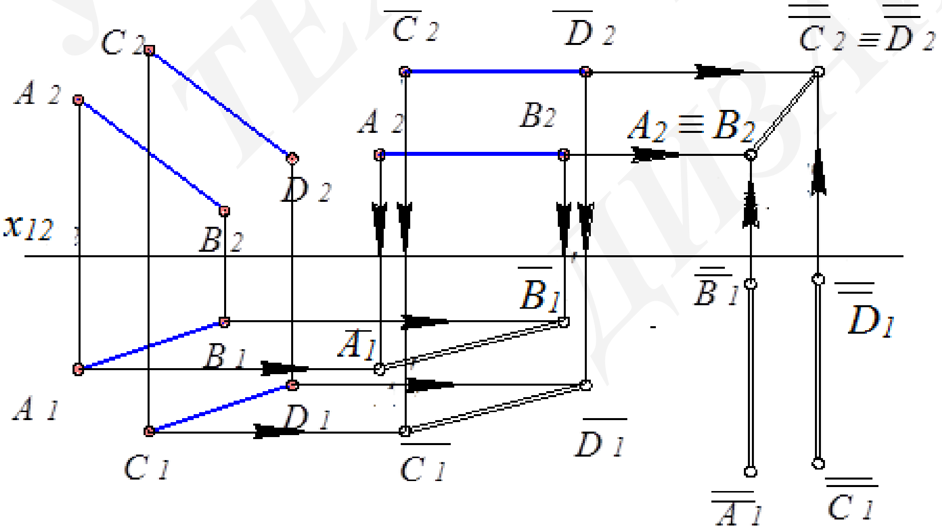


Рис. 5.15

Побудовані нові горизонтальні проекції прямих переміщують так, щоб проекції прямих, відповідно $\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1$ та $\overline{\overline{C}}_1\overline{\overline{D}}_1$, зайняли положення перпендикулярно до осі x_{12}. Кожен з відрізків *AB* та *CD,* на фронтальну площину проекцій, проекціюється в точку. Відстань між новими проекціями на фронтальній площині проекцій – шукана відстань між заданими паралельними прямими *AB* і *CD*.

Відстань між мимобіжними прямими проекціюється в натуральну величину при умові перпендикулярності однієї із прямих до площини проекцій.

На рис. 5.16 розглянуто визначення відстані між мимобіжними (перехресними) прямими *AB* і *CD*. Послідовним переміщенням (див. рис. 5.14) приведемо пряму *AB* в проекціювальне положення. Для цього не змінюючи взаємного положення та розмірів переміщують проекції прямих до фронтального положення проекції $\overline{A}_1\overline{B}_1$.

Побудовані нові фронтальні проекції прямих переміщують так, щоб проекція $\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{B}}_2$ зайняла положення перпендикулярно до осі x_{12}. Відрізок *AB* на горизонтальну площину проекцій проекціюється в точку. Відстань по перпендикуляру між новими проекціями на горизонтальній площині проекцій – шукана відстань між заданими мимобіжними прямими *AB* і *CD*. Проекцію E_1K_1, відстань між мимобіжними прямими, зворотним переміщенням перенесено на початкові проекції прямих.

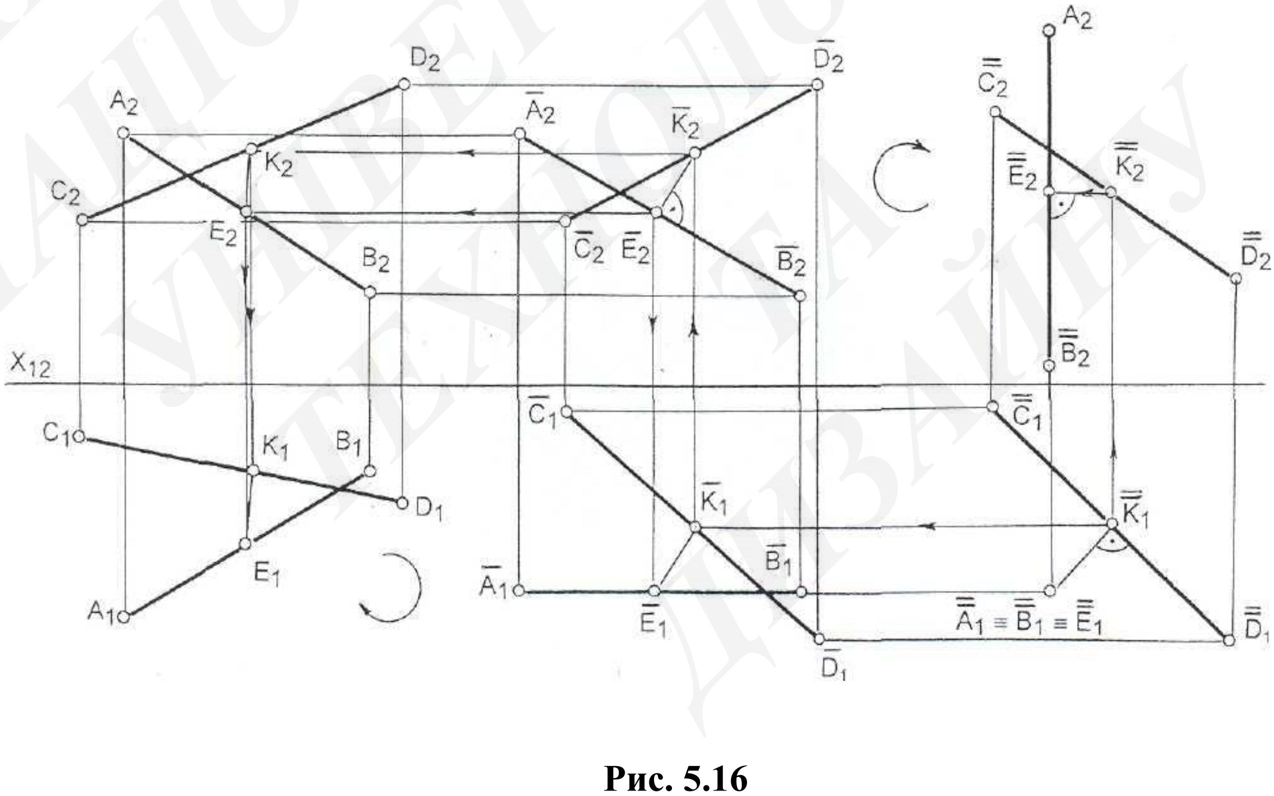


Рис. 5.16

Для визначення натуральної величини плоского відсіку *ABC* (див. рис. 5.17), в площині трикутника будують горизонталь *h*.

Горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ трикутника переміщують в положення $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$ так, щоб горизонтальна проекція горизонталі співпала з напрямом проекціювання – перпендикулярно до осі x_{12}. В цьому випадку, горизонталь буде перпендикулярна до фронтальної площини проекцій Π_2, а площина трикутника визначиться на Π_2 як фронтально проекціювальна.

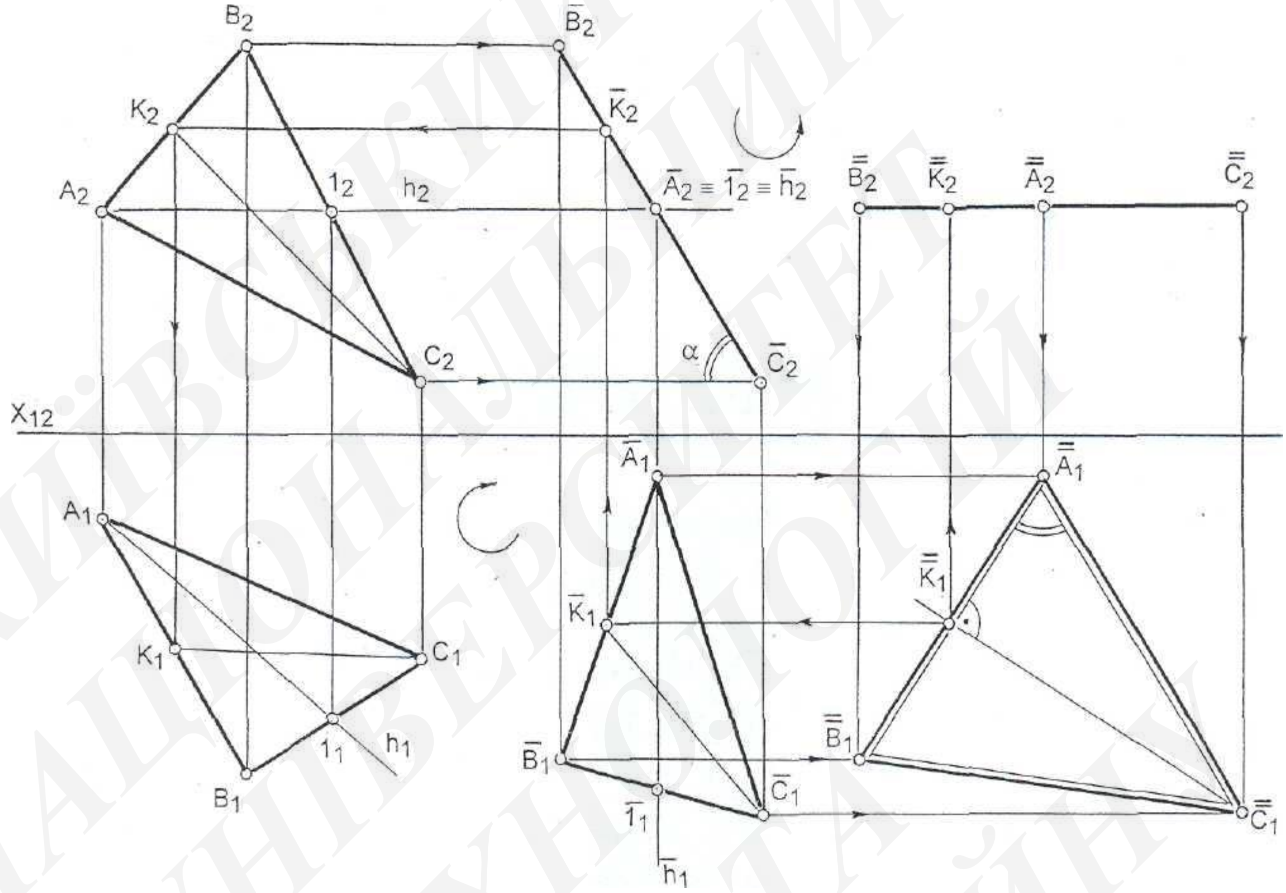


Рис. 5.17

Фронтальна проекція трикутника в новому положенні буде пряма $\overline{B}_2\overline{A}_2\overline{C}_2$. Потім трикутник переміщують паралельно відносно фронтальної площини проекцій Π_2, тобто фронтальну проекцію $\overline{B}_2\overline{A}_2\overline{C}_2$ переміщують в положення $\overline{\overline{B}}_2\overline{\overline{A}}_2\overline{\overline{C}}_2$ паралельно осі проекцій. Це буде відповідати тому, що в просторі трикутник розташовано паралельно горизонтальній площині проекцій Π_1.

Горизонтальна проекція $\overline{\overline{A}}_1\overline{\overline{B}}_1\overline{\overline{C}}_1$ являє собою натуральну величину заданого трикутника.

Так може бути побудована натуральна величина кута між прямими що перетинаються, наприклад кут між *AB* та *AC*.

Цим способом можна визначити натуральну величину кута між мимобіжними прямими, попередньо побудувавши проекцію кута мимобіжності на площині паралелізму.

Розглянутим способом можна побудувати проекції висоти трикутника – на рис. 5.17 пряма *CK* є висотою трикутника.

Для визначення двогранного кута при заданому ребрі *CD* (див. рис. 5.18), усю систему, не змінюючи розмірів, повертаємо паралельно площині проекцій Π_1 до розташування фронтальної проекції ребра $\bar{C}_2\bar{D}_2$ паралельно осі x_{12}. Визначаємо горизонтальну проекція двогранника, в якому ребро $\bar{C}_1\bar{D}_2$, після переміщення, спроекціюється в натуральну величину.

Друге переміщення системи, без зміни її розмірів, паралельно горизонтальній площині проекційΠ_2, до проекціювального розташування проекції ребра $\bar{\bar{C}}_1\bar{\bar{D}}_1$ відносно осі x_{12}, дозволить спроекціювати ребро в точку $\bar{\bar{C}}_2 \equiv \bar{\bar{D}}_2$. Кут між проекціями граней *CAD* та *CBD* визначить шукану величину.

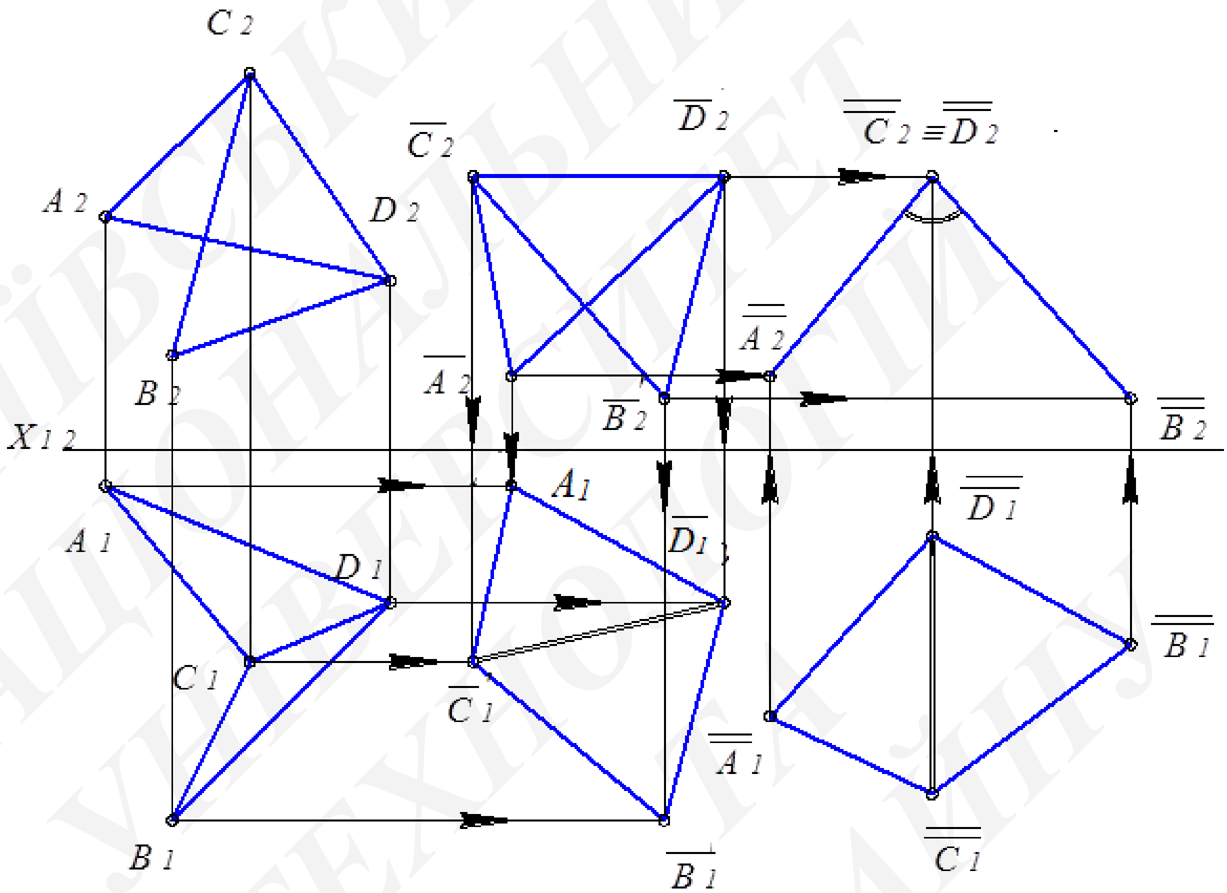


Рис. 5.18

Спосіб плоско-паралельного переміщення надає можливості для розв'язання *позиційних задач*. Задачі на перетин прямої з площиною, перетин площин тощо, зводяться до побудови проекціювального положення одного із геометричних образів, що спрощує рішення задачі.

Наведемо приклад. Необхідно побудувати точку перетину прямої *MN* з площиною, яка задана трикутним відсіком *ABC* (рис. 5.19). Для розв'язання задачі потрібно площину *ABC* привести в проекціювальне положення.

В площині ABC будують горизонталь $h - A\text{-}1$. Горизонтальну проекцію трикутника та прямої, без зміни взаємного положення та розмірів, переміщують так, щоб проекція горизонталі $\bar{h}_1$ була розташована перпендикулярно до осі x_{12}.

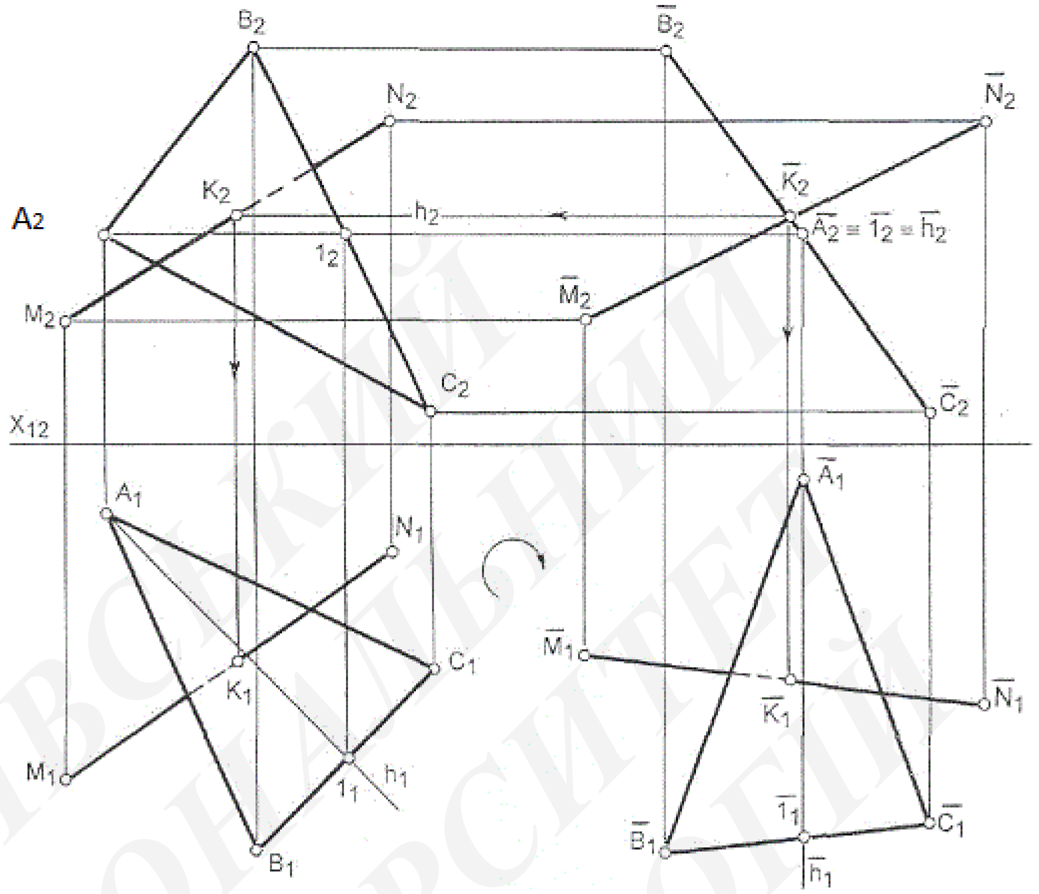


Рис 5.19

В цьому випадку, на фронтальній площині проекцій, площина проекціюється в пряму $\overline{A_2}\overline{B_2}\overline{C_2}$, а пряма відповідно в проекцію $\overline{M_2}\overline{N_2}$. Перетин їх проекцій і визначить точку $\overline{K_2}$ – точку перетину прямої з площиною. Зворотнім проекціюванням точки K_2 та K_1 будують на початкових проекціях.

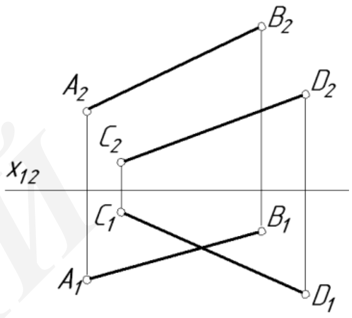
Плоско-паралельне переміщення

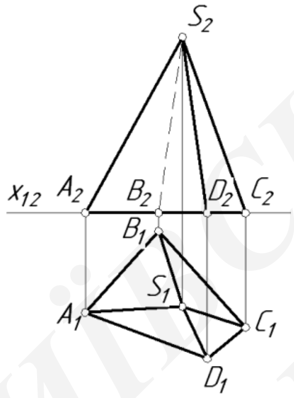
***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. У чому суть способів плоско-паралельного переміщення та заміни площин проекцій?
2. Як визначити вісь обертання при використанні способу плоско-паралельного переміщення?
3. Як перетворити площину загального положення в проекціювальне положення?

4. Яким перетворенням можна розмістити пряму або площину паралельно площині проекцій?

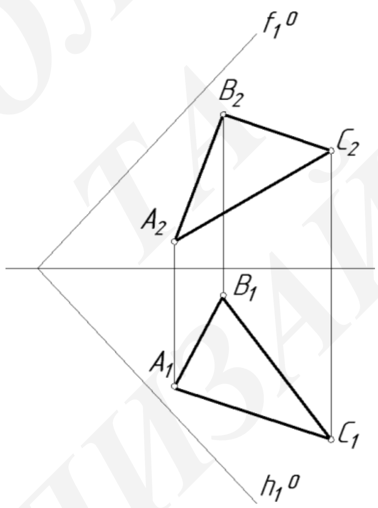
5. Визначити найкоротшу відстань між мимобіжними відрізками *AB* і *CD*.





6. Визначити величину двогранного кута при ребрі *SA*.

7. Визначити натуральну величину трикутного відсіку *ABC*, сумістивши площину $f^o h^o$ з з горизонтальною площиною проекційΠ_1.



Література по темі лекції:

[2] – с. 61-66, [9] – с. 33-34, [10] – с. 173-201.

ЛЕКЦІЯ 6

СПОСОБИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОЕКЦІЙ. ЗАМІНА ПЛОЩИН ПРОЕКЦІЙ

<u>План лекції</u>:
6.1. Сутність способу.
6.2. Послідовна заміна площин проекцій.

6.1. Сутність способу

Інколи більш доцільно застосовувати *спосіб заміни площин проекцій, при якому об'єкт залишається незмінним, а площини проекцій* $П_1$ *та* $П_2$ *замінюють на нові* $П_4$ *або* $П_5$*, так щоб відповідний елемент об'єкта на одну з них спроекціювався без спотворення*. Нова площина розташовується також перпендикулярно до незмінної площини проекцій.

При заміні площини проекцій зберігається проекція об'єкта на незмінній площині, а проекції на заміняємій площині – змінюються, але залишаються незмінними її координати.

Для побудови нової проекції точки на новій площині проекцій потрібно: *з незмінної проекції точки* (на рис. 6.1 це точка A_1) *опустити на нову вісь* x_{14} *перпендикуляр* (нова лінія зв'язку); *відкласти від нової осі відрізок, що дорівнює координаті, взятої з замінної площини – відстані від* A_2 *до* x_{12}.

Необхідно звернути увагу на те, що використовуються обидві проекції точки: одна дає напрям новій лінії проекціювального зв'язку, а друга – величину координати нової проекції точки.

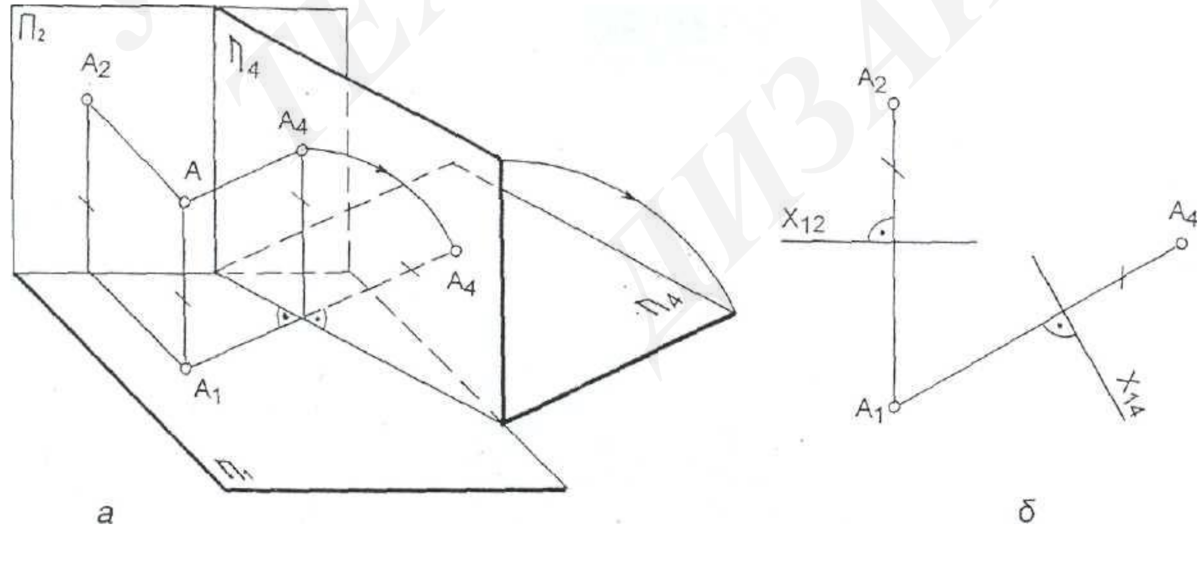


Рис. 6.1

6.2. Послідовна заміна площин проекцій

В залежності від положення об'єкта та поставлених умов, може замінятися одна, дві і рідше три площини проекцій. Але це робиться послідовно і кожний раз замінюється тільки одна площина проекцій На рис. 6.1 проведена заміна фронтальної площини проекцій $П_2$ на нову площину $П_4$. В цьому випадку, площина $П_2$ – замінна площина проекцій, площина $П_1$ – не змінна площина проекцій, а площина $П_4$ – нова площина проекцій. Відповідно, проекція A_2 – замінна проекція точки A, проекція A_2 – не змінна, а A_4 – нова проекція точки.

При рішенні як метричних так і позиційних задач, виникає необхідність в допоміжних проекціювальних прямих або площинах.

Щоб привести пряму в проекціювальне положення спочатку замінюється замінна фронтальна площина проекцій $П_2$ на нову $П_4$, яка розташована паралельно до прямої AB (див. рис. 6.2). Нова вісь проекцій x_{14} розміщується паралельно до горизонтальної проекції відрізка A_1B_1. Відрізок AB проекціюється на площину $П_4$ в натуральну величину. Кут α нахилу проекції A_4B_4 до нової осі проекцій x_{14} визначить кут нахилу відрізка AB до площини $П_1$.

Далі замінюється горизонтальна площина проекцій $П_1$, яка в цьому разі стала замінною), на нову площину $П_4$, яка перпендикулярна до проекції A_4B_4. На нову площину проекцій $П_5$ відрізок AB проекціюється в точку, так як відстані від осі x_{14},на замінній проекцій $П_1$, до точок A_1 і B_1 однакові.

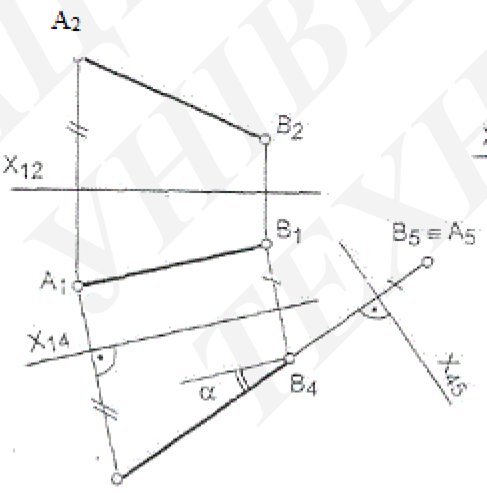


Рис. 6.2

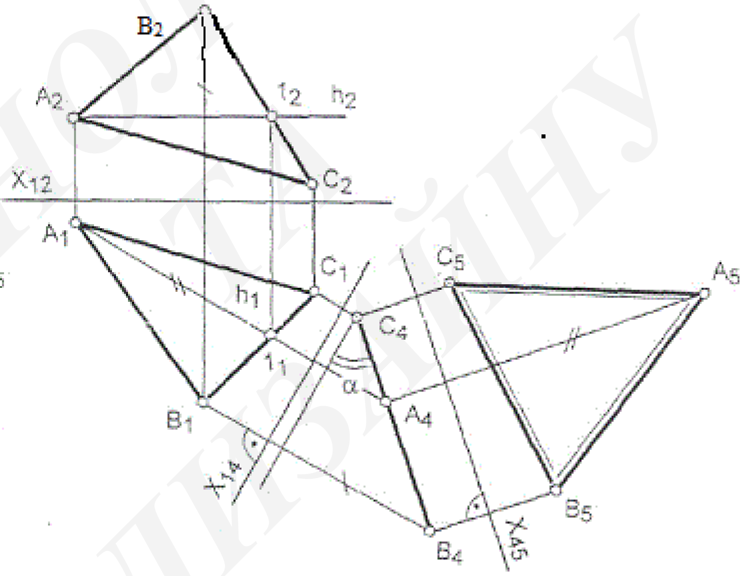


Рис. 6.3

На рис. 6.3. розглянуто дві задачі,такі самі як на рис. 5.6 та на рис. 5.17. Перша задач – площину трикутника ABC приведено в проекціювальне положення та визначено кут нахилу площини ABC до площини проекцій $П_1$. Друга задача – визначено натуральну величину трикутника.

Спочатку заміняється фронтальна площина проекцій $П_2$ на нову $П_4$, яка перпендикулярна до площини трикутника ABC. На підставі властивості прямого кута, нова вісь проекцій x_{14} розміщується перпендикулярно до горизонтальної проекції горизонталі $h_1 - A_1 1_1$.Трикутний відсік займає на новій площині проекцій $П_4$ проекціювальне положення: нова проекція трикутника – відрізок прямої $A_4B_4C_4$. Кут α нахилу прямої до нової осі проекцій x_{14} і визначить нахил трикутника до площини $П_1$, так як площина трикутника по відношенню до $П_4$ стала проекціювальною.

Далі заміняється горизонтальна площина проекцій $П_1$ на нову $П_5$, паралельну площині трикутника – прямої $A_4B_4C_4$. Нова вісь проекцій x_{45} взята паралельно до нової проекції трикутника $A_4B_4C_4$.

Нова проекція $A_5B_5C_5$ визначає натуральну величину трикутника, який розташовано паралельно новій площині проекцій $П_5$.

На рис. 6.4 представлене розв'язання наступної задачі: визначити відстань між паралельними прямими. Хід рішення відповідає задачі представленої на рис. 6.2. визначаємо натуральну величину відрізків *AB* і *BC*, розташувавши нову площину $П_4$ паралельно не змінним проекціям прямих A_1B_1 та C_1D_1.

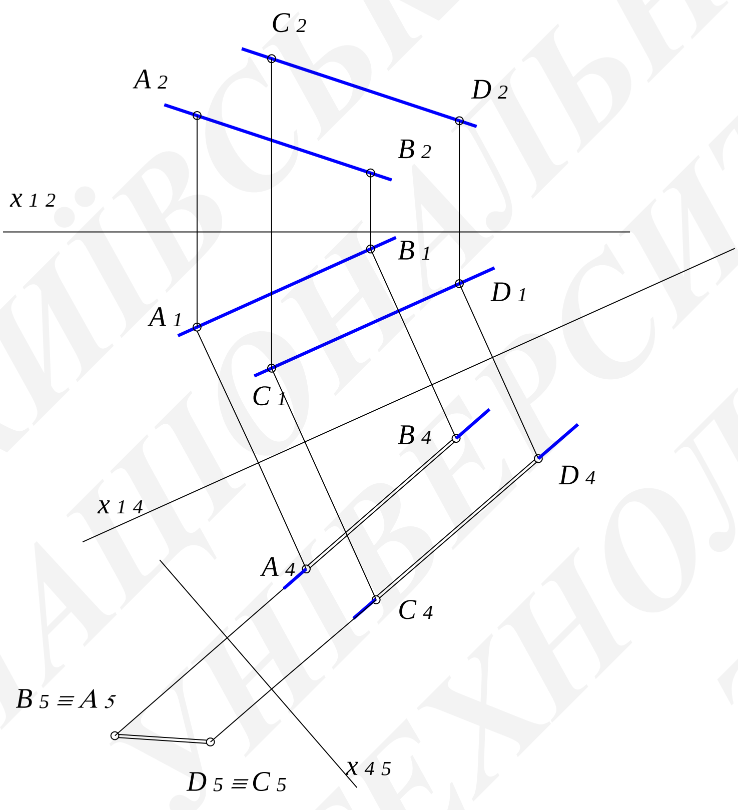


Рис. 6.4

Заміна площини $П_4$, яка вже замінна, на нову площину $П_5$, яка в свою чергу перпендикулярна до проекцій A_4B_4 та C_4D_4, дозволить перевести прямі в проекціювальне положення. Відстань між точками $A_5 \equiv B_5$ та $C_5 \equiv D_5$ є шуканою відстанню між паралельними прямими.

Так само можна визначити і кут між прямими які перетинаються (наприклад, між прямими *AB* і *BC*, див. рис. 6.3). Кут між мимобіжними прямими вимірюється лінійним кутом, який проекціюється на площину паралелізму прямих: площину яка одночасно паралельна до двох мимобіжних (перехресних) прямих.

Тому, *для визначення натуральної величини кута між мимобіжними прямими необхідно: а) побудувати проекції кута (вірніше площину паралелізму) між мимобіжними прямими на площинах проекцій; б) визначити натуральну величину кута, як лінійного кута, по його проекціям на відповідній площині*.

На рис. 6.5 задані мимобіжні прямі *AB* та *CD*. Для побудови проекцій лінійного кута, вибирається довільна точка *E* (E_1; E_2), через яку проводяться прямі *m* та *n* паралельно мимобіжним прямим – пряма *m*// *CD*, пряма *n* // *AB*.

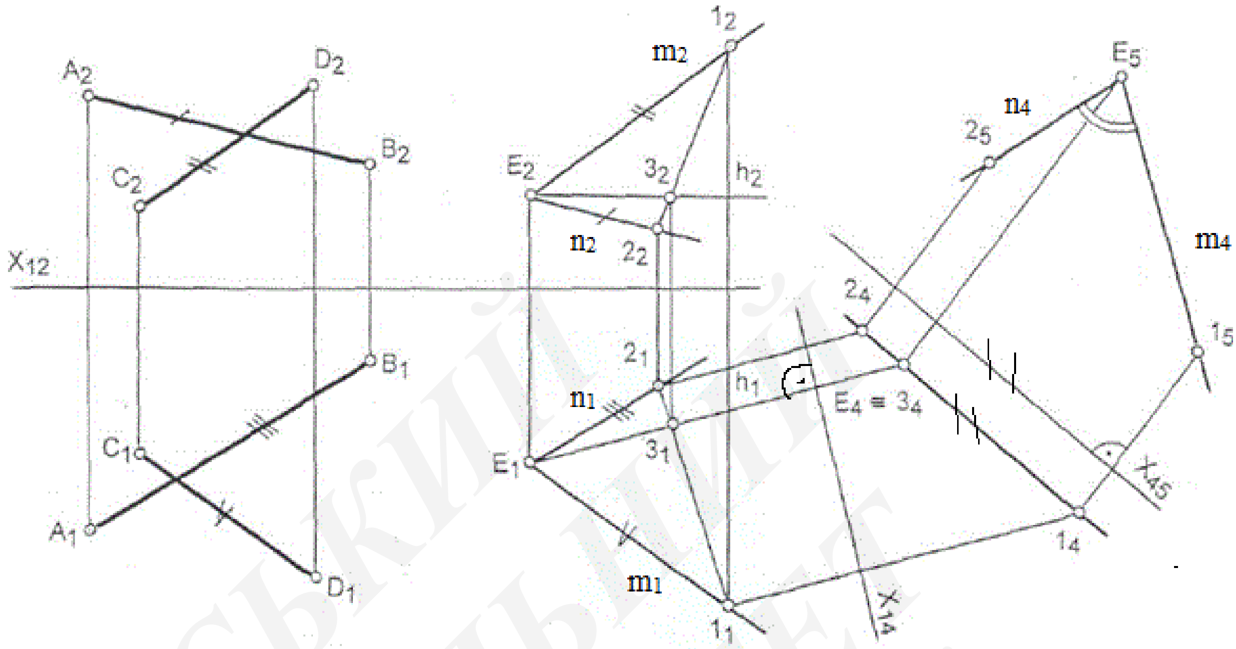


Рис. 6.5

Площина, яка утворена прямими *m* та *n* – площина паралелізму мимобіжних прямих *AB* та *CD*. Це легко доводиться, виходячи з паралельності прямої та площини (див. лекція 4, рис. 4.1).

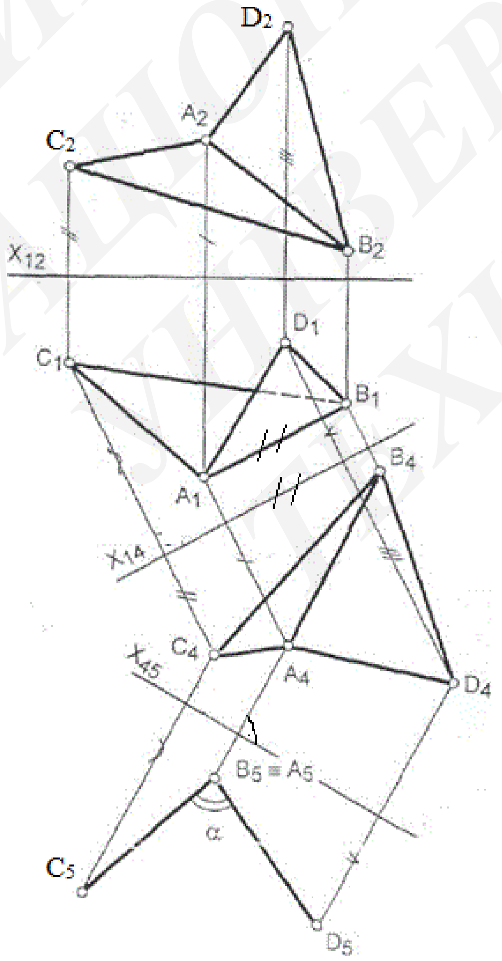


Рис. 6.6

Щоб визначити кут мимобіжності необхідно визначити натуральну величину трикутника *1E2*. Побудови на рис. 6.5 аналогічні побудовам виконаним на рис. 6.3. Кут $1_5E_52_5$ – є шуканий кут між мимобіжними прямих *AB* і *CD*.

Двогранний кут, це кут між двома гранями зі спільним ребром, який вимірюється лінійним кутом, площина якого перпендикулярна до площин, що утворюють цей кут.

Лінійний кут проекціюється в натуральну величину (див рис. 2.5) за умови паралельності його площини до площини проекцій. Це можливо за умови, що грані двогранного кута будуть проекціювальними, а значить, і спільне ребро граней також буде проекціювальним.

З цього необхідно зробити висновок – *для побудови натуральної величини двогранного кута необхідно привести спільне ребро двох граней в проекціювальне положення.*

На рис. 6.6 визначена натуральна величина лінійного кута, яким вимірюється двогранний кут при ребрі *AB*.

Нову площину $П_4$ розташовують паралельно не змінній проекції ребра *AB*. Тому нова вісь x_{14} розміщується паралельно горизонтальній проекції ребра A_1B_1. Будуємо нові проекції ребра – A_4B_4 і точок C_4 та D_4.

Потім нова площина $П_5$ береться перпендикулярно до ребра *AB*, що визначає положення нової осі x_{45} перпендикулярної до проекції ребра A_4B_4. Переносимо координати з замінної площини проекції $П_1$ (відносно осі x_{14}), визначаємо нову проекцію двогранного кута, де ребро *AB* проекціюється в точку, а шуканий лінійний кут α проекціюється без спотворень.

Відстань між двома паралельними площинами вимірюється величиною відрізка прямої, який перпендикулярний цим площинам та обмеженого ними.

Відстань між паралельними площинами проекціюється в натуральну величину при умові проекціювального положення їх відносно однієї з площин проекцій.

Нову площину $П_4$ (див. рис. 6.7) вибирають перпендикулярно до горизонтальних слідів площин $\Sigma(h^0f^0)$ та $\Delta(h^{0'}f^{0'})$. Тоді нова вісь x_{14} буде перпендикулярна до слідів h_1^0 та $h_1^{0'}$. Допоміжні точки *1* та *2* визначать напрям слідів f_4^0 та $f_4^{0'}$ на площині проекцій $П_4$. Відстань між паралельними площинами на площині проекцій $П_4$ визначає відрізок *d* одночасно перпендикулярний до слідів площин Σ та Δ, а саме перпендикуляр між f_4 та f_4'.

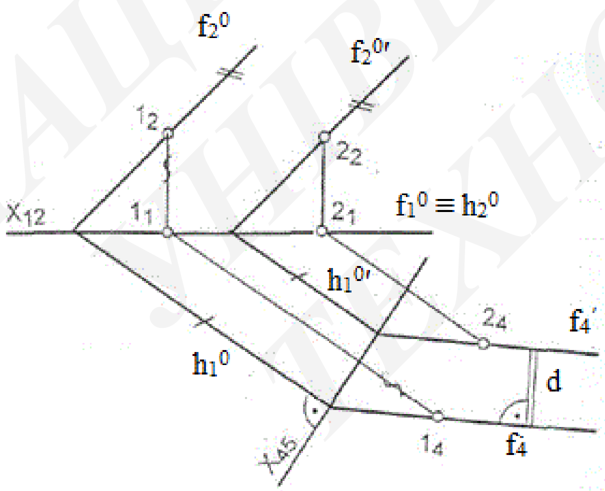


Рис. 6.7

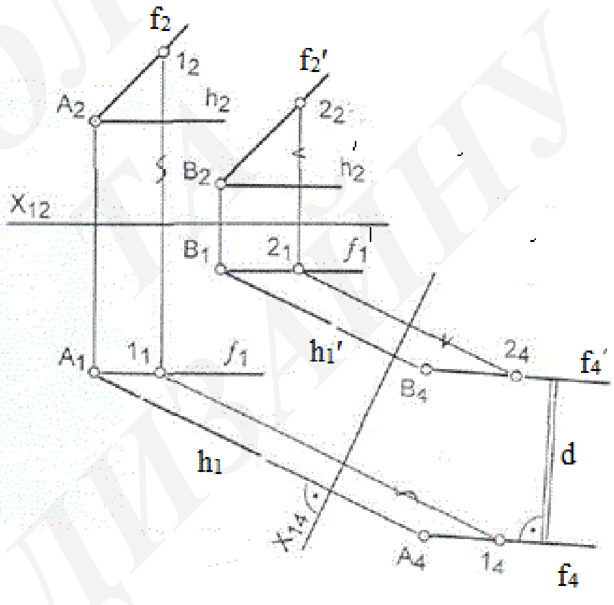


Рис. 6.8

На рис. 6.8 визначена натуральна величина відстані між паралельними площинами, які задані горизонталлю *h* та фронталлю *f*. Побудова на рис. 6.8 аналогічна побудові виконаній на рис. 6.7 і зрозуміла з рисунка.

Спосіб заміни площини проекцій інколи використовують і для розв’язання позиційних задач, таких як: *перетин прямої з площиною; перетин двох площин; перетин поверхонь площиною; взаємний перетин поверхонь*.

В практиці частіше зустрічаються задачі, коли геометричні образи мають загальне положення. Для розв'язання задач в цих випадках необхідно приведення основних проекцій загального положення в допоміжні (особливі), в яких шуканий результат можна получити безпосередньо або наблизити (спростити) до рішення поставленої задачі.

На рис. 6.9 розглянута задача побудови точки перетину прямої *DE* з площиною заданою трикутником *ABC*. Площина $П_1$ замінена на нову $П_4$, яка перпендикулярна до площини трикутника, так як перпендикулярна до фронталі площини, з тим, щоб остання стала проекціювальною. На новій проекції елементів визначилась точка K_4 перетину, по якій,за відповідністю, визнається фронтальна K_2, а потім і горизонтальна K_1 проекції точки перетину прямої з площиною трикутника.

Побудова ліній перетину двох площин. Це задача на побудову точок перетину будь-яких двох прямих однієї площини з іншою площиною.

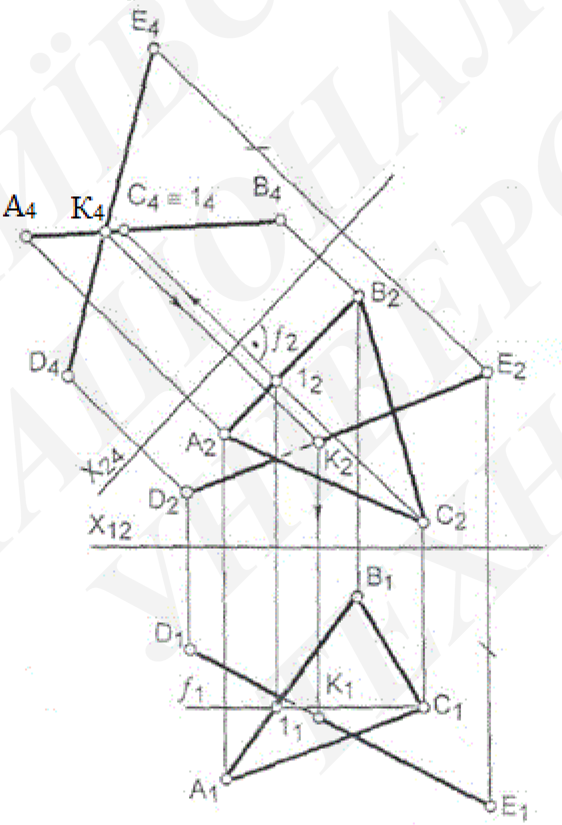


Рис. 6.9

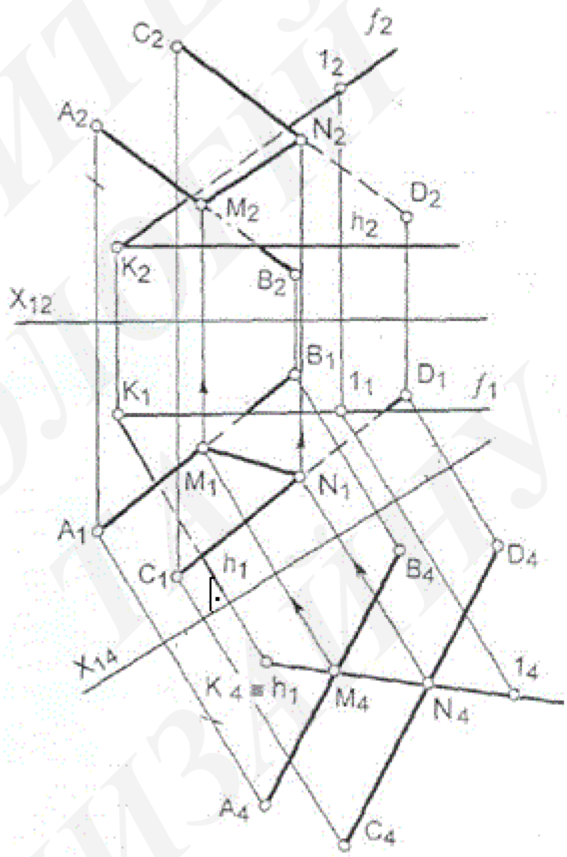


Рис. 6.10

На рис. 6.10 задані дві площини: – одна площина задана фронталлю та горизонталлю (*hf*), а друга – паралельними прямими *AB* та *CD*. Вибираємо нову площину $П_4$ перпендикулярну до площини *hf*, площина *hf* на площині проекцій $П_4$ займе проекціювальне положення, а прямі *AB* та *CD* зобразяться проекціями A_4B_4 та C_4D_4. Точки перетину цих проекцій з проекцією площини і визначать точки відповідно M_4 та N_4 – проекції точок перетину відповідно прямих *AB* та *CD* з площиною. Зворотнім проекціюванням на площини проекцій $П_1$ та $П_2$

визначають проекції точок M та N. Сполучивши однойменні проекції точок M та N на площинах проекцій, отримаємо шукану лінію перетину площин.

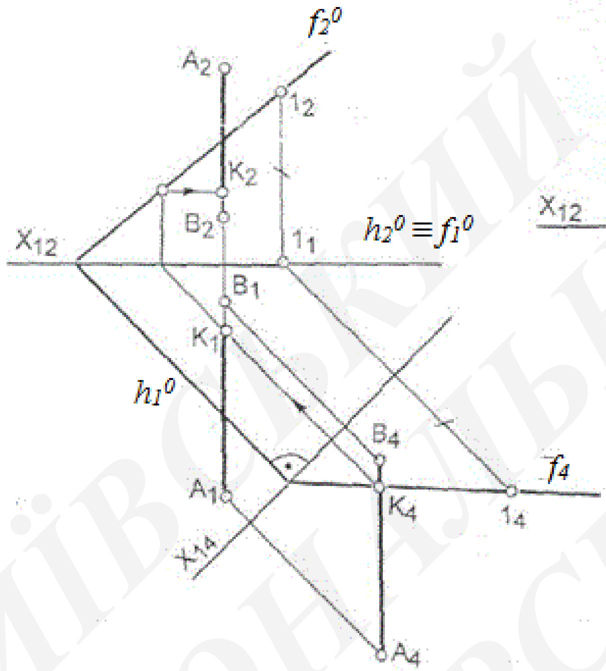


Рис. 6.11

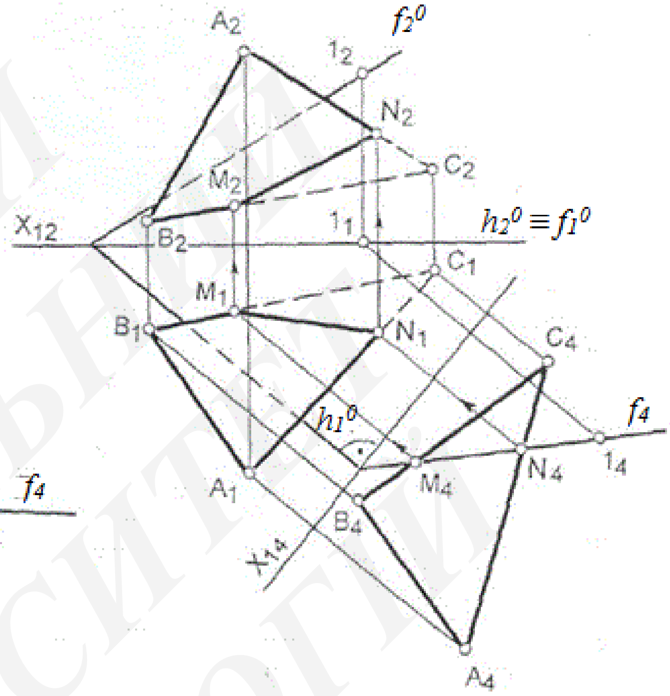


Рис. 6.12

На рис. 6.11 розглянута задача на перетин профільної прямої AB з площиною заданою слідами h^0f^0. На рис. 6.12 розв'язана задача на перетин двох площин, коли одна з них задана слідами h^0f^0, а інша трикутним відсіком ABC. Побудови на зазначених рисунках зрозумілі з попередніх задач та рисунків.

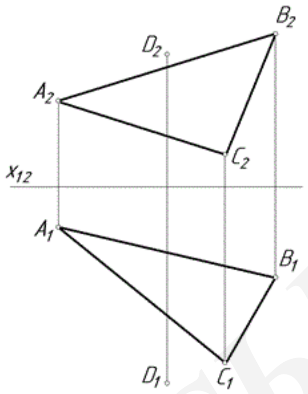
Заміна площин проекцій

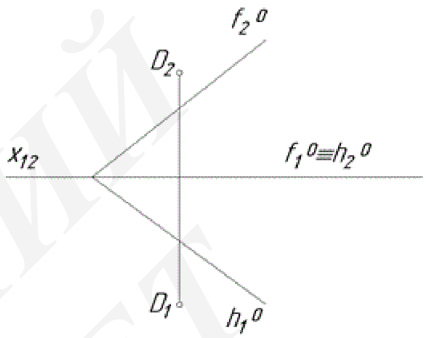
Використання способу заміни площин проекцій для розв'язання позиційних задачі на перетин поверхонь площиною та взаємний перетин поверхонь, буде розглянуто в наступних лекціях.

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

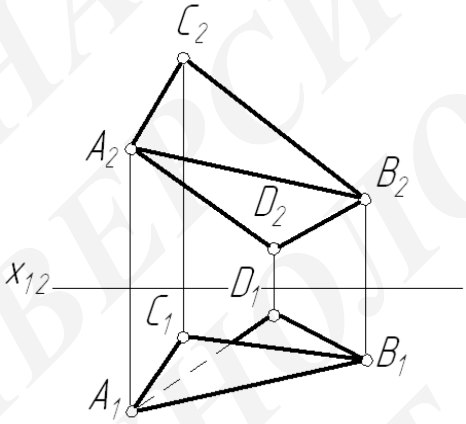
1. У чому суть способу заміни площин проекцій?
2. Як перетворити пряму загального положення в проекціювальне положення?
3. Як перетворити площину загального положення в проекціювальне положення?
4. Яким перетворенням можна розмістити пряму або площину паралельно площині проекцій?

5. Визначити відстань від точки D до: а) площини заданої трикутним відсіком ABC; б) площини Σ, заданої слідами$h^0 f^0$.





6. Визначити величину двогранного кута



Література по темі лекції:

[1] – с. 75-81, [2] – с. 81-84, [3] – с. 46-52, [4] – с. 31-32.

ЛЕКЦІЯ 7

БАГАТОГРАННИКИ

<u>План лекції</u>:

7.1. Деякі види багатогранників та їх зображення на комплексному креслинику.

7.2. Перетин багатогранників проекціювальною площиною.

7.3. Розгортка багатогранників.

7.1. Деякі види багатогранників та їх зображення на комплексному кресленику

Багатогранником називають тіло, яке обмежено плоскими багатокутниками. Твірними багатогранника є *грані*, сторони граней називають *ребрами*, а їх вершини – *вершини* багатогранника. Сукупність всіх ребер багатогранника називають його *сіткою*.

Багатогранник називають *опуклим*, якщо він весь лежить по один бік від площини будь-якої грані; тоді грані його також опуклі багатогранники. Дві грані, що перетинаються , утворюють двогранний кут. Багатогранний кут при будь-якій вершині опуклого багатогранника також опуклий. Якщо площини, що утворюють багатогранну поверхню, замкнені, то вони утворюють *замкнений* багатогранник.

Побудова проекцій багатогранників зводиться до побудови проекцій його сітки. Побудова проекцій вершин дозволить побудувати проекцію сітки.

Із множини багатогранників найбільш практичний інтерес представляють призми, піраміди, призматоїди, а також правильні опуклі багатогранники (тіла Платона).

Призма – це багатогранник, який обмежений призматичною поверхнею та двома паралельними площинами, які не паралельні ребрам призми багатогранника. Ці дві грані називають *основами* призми, грані призматичної поверхні – *бічними гранями*, а її ребра – *ребрами* призми. Багатогранники основи рівні між собою, так само рівні між собою бічні ребра.

Якщо бічні грані займають проекціювальне положення відносно площини проекцій то призму називають *прямою*. У разі невиконання цієї умови призма *похила*. Якщо основи не паралельні між собою, то призма є *зрізаною*.

Піраміда – це багатогранник, усі грані якого, крім однієї, мають спільну вершину, яку називають *вершиною* піраміди. Всі бічні грані її – *трикутники*.

Призму і піраміду розрізняють за числом кутів основи. Якщо основою є правильний багатокутник, а висота збігається з віссю, то призму і піраміду називають *правильними*.

Тіла Платона – це правильні опуклі багатогранники. У них усі ребра, кути, як плоскі, двогранні просторові рівні між собою.

Розрізняють п’ять видів правильних багатогранників:

а) тетраедр (чотиригранник) – грані його чотири рівносторонні трикутника;

б) октаедр (восьмигранник) – грані його осім рівносторонніх трикутника;

в) ікосаедр (двадцятикутник) – грані його двадцять рівносторонніх трикутника;

г) гексаедр (шестигранник), або куб – грані його шість квадратів;

д) додекаедр (дванадцятигранник) – грані його 12 правильних п’ятикутників.

Навколо усіх правильних багатогранників можна описати сферу.

7.2. Перетин багатогранників з проекціювальною площиною

Лінією перетину багатогранника площиною, у загальному випадку, є плоский багатокутник (див. рис. 7.1). Фігура, яка утворюється при перетині поверхні січною площиною, називається *перерізом*.

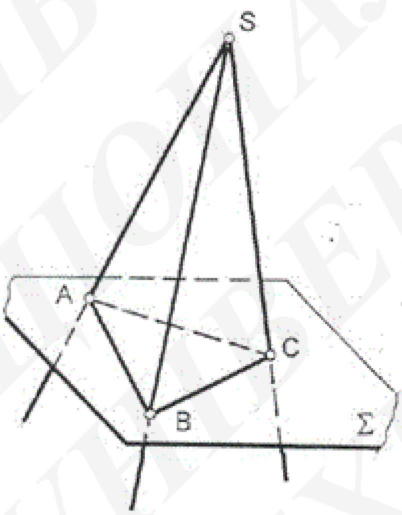


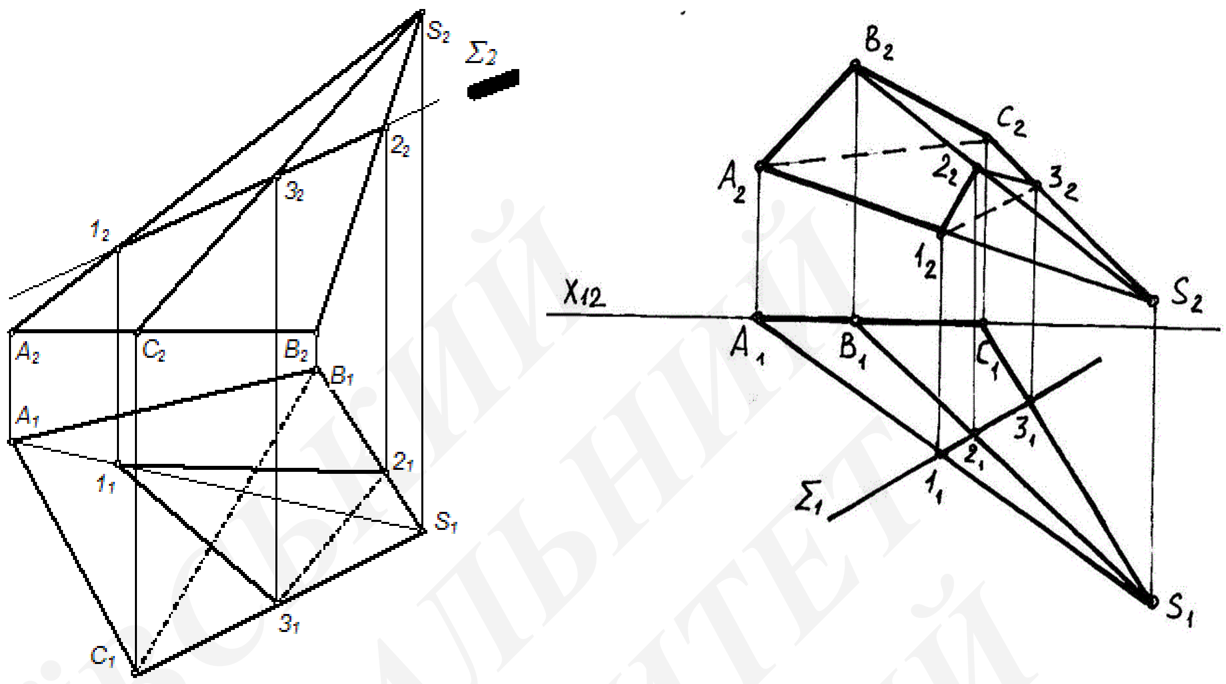
Рис. 7.1

Для побудови такого багатокутника необхідно знайти точки перетину ребер призми або піраміди заданою площиною. Або знайти лінії, по яким грані призми або піраміди перетинаються площиною. В першому випадку побудова зводиться до задачі на перетин прямої з площиною, в другому випадку – на перетин площин (граней багатогранників) між собою.

На рис. 7.2 розглянуто випадки побудови лінії перетину багатогранників проекціювальною січною площиною. На рис. 7.2, *а* представлено перетин похилої піраміди фронтально-проекціювальною січною площиною Σ.

Якщо *площина перерізу проекціювальна, то фігура перерізу многогранника збігається зі слідом площини на площині проекцій, до якої ця площина перпендикулярна*.

Лінія перетину тригранної піраміди *ABCS* загального положення з фронтально проекціювальною площиною Σ на фронтальній проекції збігається з проекцією площини. Горизонтальну проекцію лінії перетину *1-2-3* можна визначити за фронтальними проекціями шуканих точок, які належать відповідним ребрам піраміди – за їх відповідністю. Точка *1* належить ребру *AS*, точка *2* належить ребру *BS*, точка *3* належить ребру *CS*.



а *б*

Рис. 7.2

Побудова перетину похилої піраміди горизонтально-проекціювальною січною площиною Σ представлена на рис. 7.2, *б*.

Будуючи переріз, треба визначити видимість перерізу (його елементів) на площинах проекцій. Розглянемо послідовність на прикладі рис. 7.2, *б*. Якщо лінія перерізу розташована на грані, яка проекціюється на площину проекцій як видима, то і лінія перерізу зображується як видима.

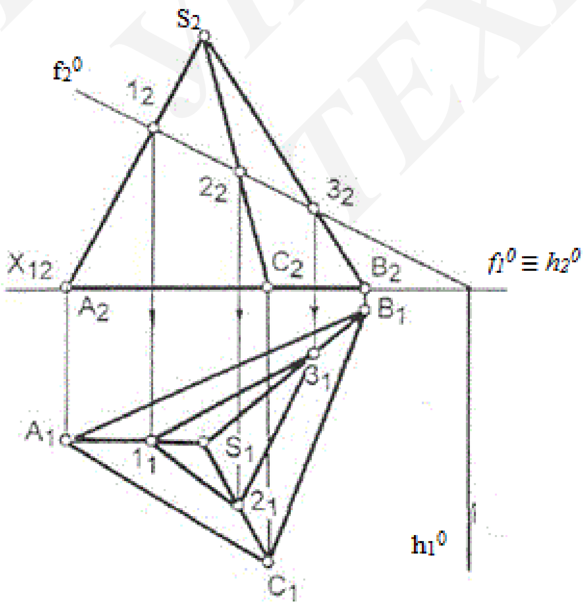


Рис. 7.3

Проекція грані $A_2S_2B_2$ на площині проекцій Π_2 зображується як видима, тому що ребро основи A_2B_2 зображене як видиме.

Лінія перерізу 1_22_2 належить цьому ребру, то і зображується на площині проекцій Π_2 як видиме. Так само зображується як видима лінія перерізу 2_23_2, тому що належить грані $B_2S_2C_2$, яка в свою чергу зображена як видима.

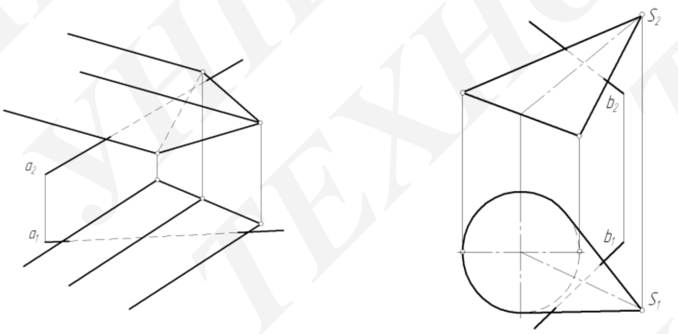
А лінія перерізу 1_23_2 зображена як невидима (з використання лінії штрихової), тому що грань $A_2S_2C_2$ зображена як невидима – її ребро основи A_2C_2 зображене як невидиме.

На рис. 7.3 зображено неправильну піраміду, яка перетинається фронтально проекціювальною площиною h^0f^0. Фронтальна проекція трикутника перерізу 1_2-2_2-3_2 збігається з фронтальним слідом площини. Горизонтальна проекція перерізу 1_1-2_1-3_1 визначена за допомогою вертикальних ліній проекціювального зв'язку.

Переріз граних поверхонь

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. Що таке переріз?
2. Як будується фігура, яка утворена при перетині поверхні призми або піраміди площиною?
3. Побудувати переріз піраміди довільною площиною, яка задана лініями рівня.
4. Наведіть приклади коли при побудові перерізу доцільно використовувати допоміжні січні площини, а коли допоміжне косокутне проекціювання.
5. Як визначити видимість перерізу, лінії взаємного перетину?
6. Як будуються точки перетину призми або піраміди прямою лінією (точки входу та виходу)?
7. Побудувати перетин поверхні прямою.



Література по темі лекції:

[2] – с. 97-100, [9] – с. 40-42, 50-51, [10] – с. 248-250, 273-280.

ЛЕКЦІЯ 8

КРИВІ ЛІНІЇ

План лекції:

8.1. Основні положення.
8.2. Властивості плоских кривих.
8.3. Обводи з кривих.
8.4. Еволюта та евольвента.
8.5. Криві другого порядку.
8.5.1 Лінії конічного перерізу.
8.5.2 Лінії циліндричного перерізу.
8.5.3 Лінії сферичного перерізу
8.5.4 Побудова кривих другого порядку
8.6. Просторові криві лінії

8.1. Основні положення

Криві лінії використовують в різних галузях техніки і науки. Вони находять широке застосування в практиці моделювання, в розміточній справі і тощо. Знання законів побудови та зображення кривих ліній і поверхонь має особливе значення в інженерній і конструкторській діяльності.

В нарисній геометрії криву лінію можна розглядати як геометричне місце послідовних положень безперервного переміщення точки в просторі або як результат перетину поверхонь.

Якщо утворення кривої лінії може бути виражено відповідним законом (рівнянням), то таку лінію називають *закономірною*. Інші лінії, які неможливо визначити відповідним законом – *незакономірні*. Лінія може бути задана *аналітично* (рівнянням) або *графічно*, тобто проекціями.

В нарисній геометрії криві лінії задаються і досліджуються графічно, тобто в проекціях.

Крива лінія, всі точки якої належать одній площині, називається *плоскою кривою* (рис. 8.1), а якщо не належать – *просторовою* (рис. 8.2).

Елементи кривої лінії.

Пряма, яка проходить через дві точки кривої, називається *січною* – пряма *a* на рис. 8.3.

Граничне положення січної, коли дві точки ЇЇ перетину з кривою, наближаються одна до другої і збігаються, називається *дотичною* (пряма *t* на рис. 8.3).

Пряма, яка лежить в площині кривої та перпендикулярна до дотичної в точці дотику, називається *нормаллю* (пряма *n* на рис. 8.3).

Якщо на кожній ділянці кривої в кожній точці можна провести тільки одну дотичну *t* по мірі переміщення точки дотику, дотична пряма повертається в одному напрямку, то крива називається *гладкою*.

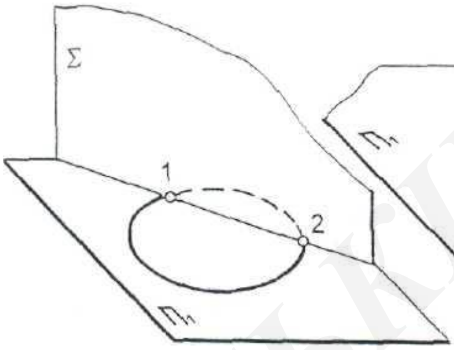


Рис. 8.1

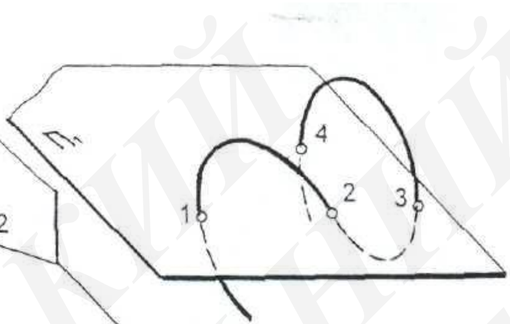


Рис. 8.2

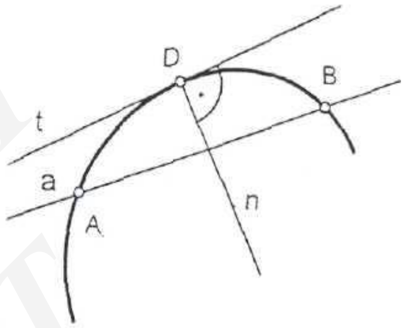
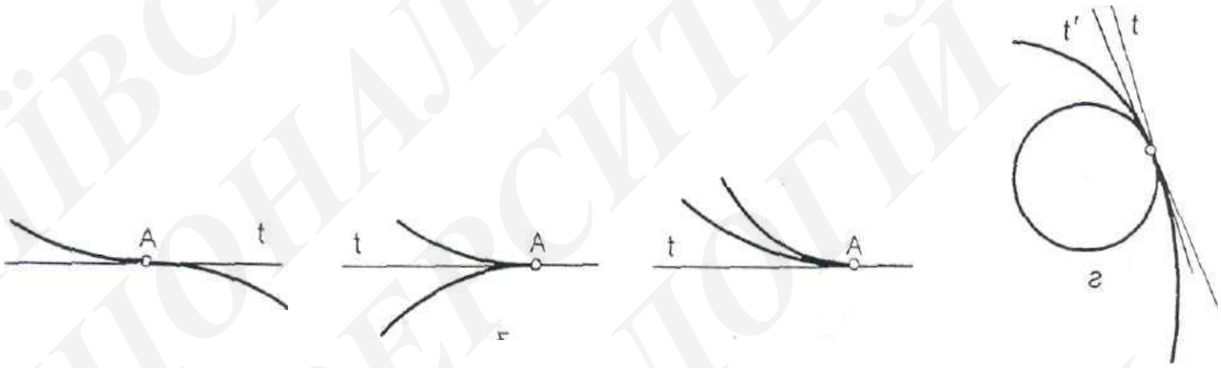


Рис. 8.3



а *б* *в*

Рис. 8.4

Якщо в деякій точці кривої це положення не виконується, то точка називається *особливою*. Такими точками будуть: *точка перетину*, в якій крива переходить на другий бік дотичної (рис. 8.4, *а*); *точка повернення першого роду* (рис. 8.4, *б*); *точка повернення другого роду* (рис. 8.4, *в*); *вузлова точка* (рис. 8.5, *в*).

8.2. Властивості плоских кривих

1. Проекцією плоскої кривої, в загальному випадку, є *крива лінія* (рис. 8.5, *а*, *б*).

2. Проекцією плоскої кривої, яка знаходиться в проекціювальні площині, є *пряма*,яка збігається зі слідом площини (рис. 8.5, *в*).

3. Кожній точці на кривій відповідає точка на її проекції – точка *B* на рис. 8.5, *а*.

4. Якщо пряма є січною кривої лінії, то її проекція – січна на проекції кривої (рис. 8.5, *а*, *б*).

5. Якщо пряма дотична до кривої в деякій точці, то і проекція цієї прямої дотична до проекції кривої в тій же точці (рис. 8.5, *а*, *б*).

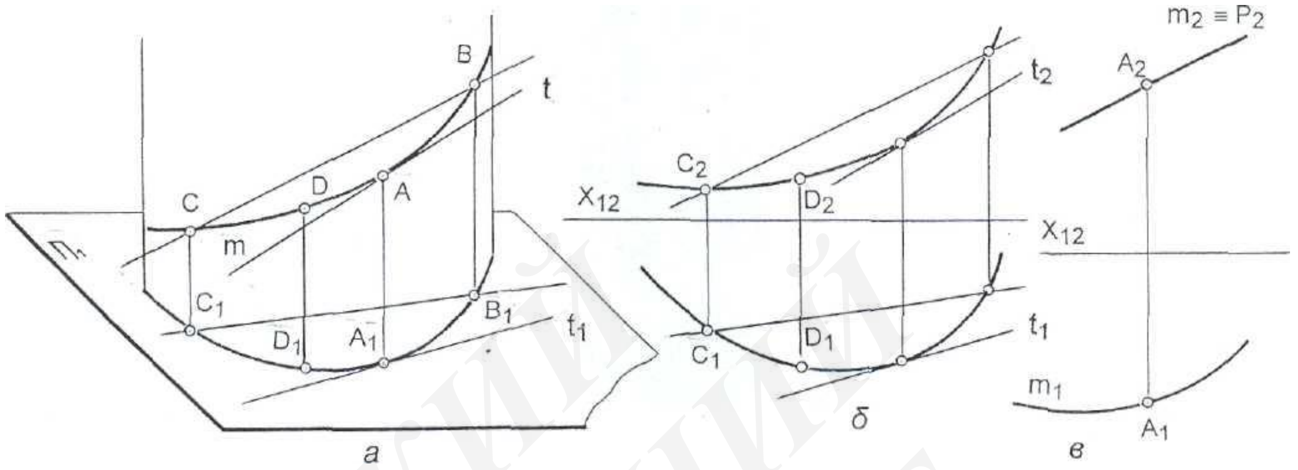


Рис. 8.5

8.3. Обводи з кривих

В даний час,одним із основних понять конструкторської практики проектування поверхонь є поняття *обводу* (технічна крива).

Обводом називається крива, яка складена з дуг різних кривих, сполучених між собою певним чином.

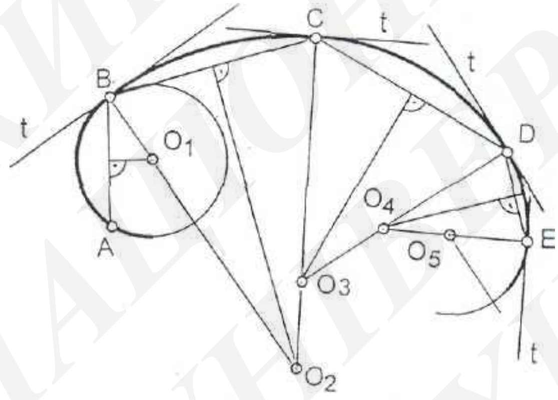


Рис. 8.6

Обводи, дуги яких мають на стиках спільну дотичну, називаються *гладкими обводами* або *коробовими лініями*. На рис. 8.6 виконана побудова коробової лінії, яка проходить через точки A, B, C, D, E.

Для побудови коробової лінії через задані точки необхідно ще додаткові умови.

Це може бути задана дотична в точці, дуга певного радіуса, яка проходить через дві точки і інші умови.

В наведеному прикладі задане коло певного радіуса, яке проходить через точку A і B. Відомими способами визначають центр кола, з заданим радіусом, яке проходить через точки A і B. Другий центр буде знаходитись на прямій BO_1. Для його визначення сполучають точки B_1 та C_1, через середину відрізка проводять перпендикуляр, який в перетині з лінією BO_1 визначить другий центр O_2. З центра O_2проводять дугу, яка в точці B має спільну дотичну t з дугою AB.

Так визначають і інші центри та радіуси дуг кривої, яка проходить через точки A, B, C, D, E.

8.4. Еволюта та евольвента

Евольвента – це плоска крива, яка є розгорткою іншої кривої, що називається *еволютою*.

Розглянемо розгортку кола (рис. 8.7). Тут пряма лінія m переміщується без ковзання по колу, а точка A, яка незмінно зв’язана з прямою, займає ряд положень A_0, A_1, A_2, A_3...

Геометричним місцем точок переміщення точки *A*, буде крива лінія, яку називають *евольвентою* або *розгорткою кола*. А саме *коло* буде *еволютою*.

Кожне із положень прямої *m* є нормаллю евольвенти. Довжина відрізка A_3-*3* дорівнює довжині дуги *0-1-2-3* нерухомого кола. Таким чином, при побудові точок розгортки кола потрібно визначати довжини дуг кола і відкладати їх на дотичних у визначеній точці. Довжина евольвенти кола дорівнює $2\pi R$.

На рис. 8.8. наведена побудова евольвенти заданої кривої *0-1-2-3-4-5*.

Як і в розглянутому прикладі, пряма *m* переміщується без ковзання по кривій, а точка *A* описує траєкторію, яка і визначає евольвенту кривої *m* – *розгортку кривої*.

Основні властивості еволют і евольвент:

- будь-яка плоска крива має незчисленність евольвент;
- через кожну точку дотичної до еволюти проходить тільки одна евольвента;
- дотичні еволюти є нормалями евольвенти;
- довжина дуги еволюти дорівнює абсолютному значенню від'ємини радіусів кривизни еволюти в кінцях її дуги;
- будь-яка плоска крива є геометричним місцем центрів кривизни своєї евольвенти.

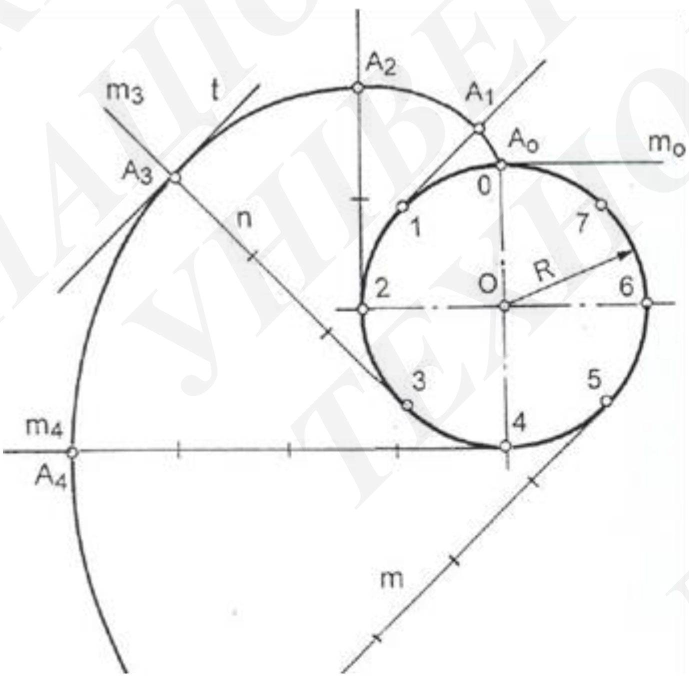


Рис. 8.7

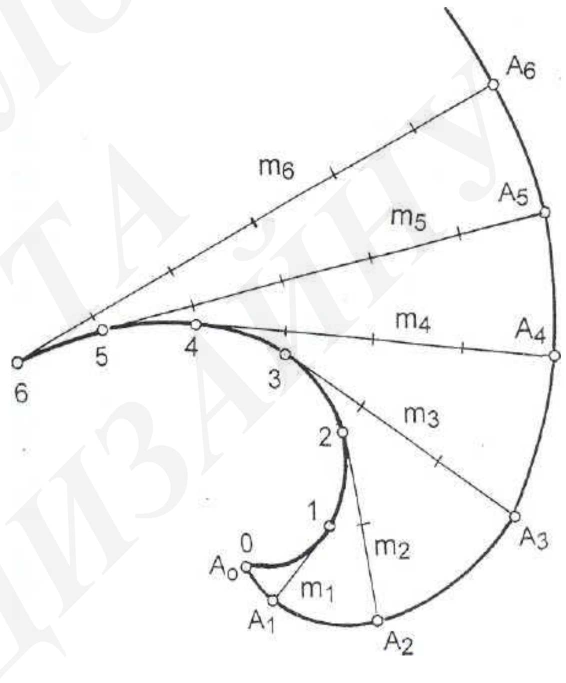


Рис. 8.8

8.5. Криві другого порядку
8.5.1. Лінії конічного перерізу

Лінії, отримані при перерізі прямого кругового конуса (конус другого порядку) площинами називаються *конічними перерізами*. Форма кривої залежить від положення січної площини.

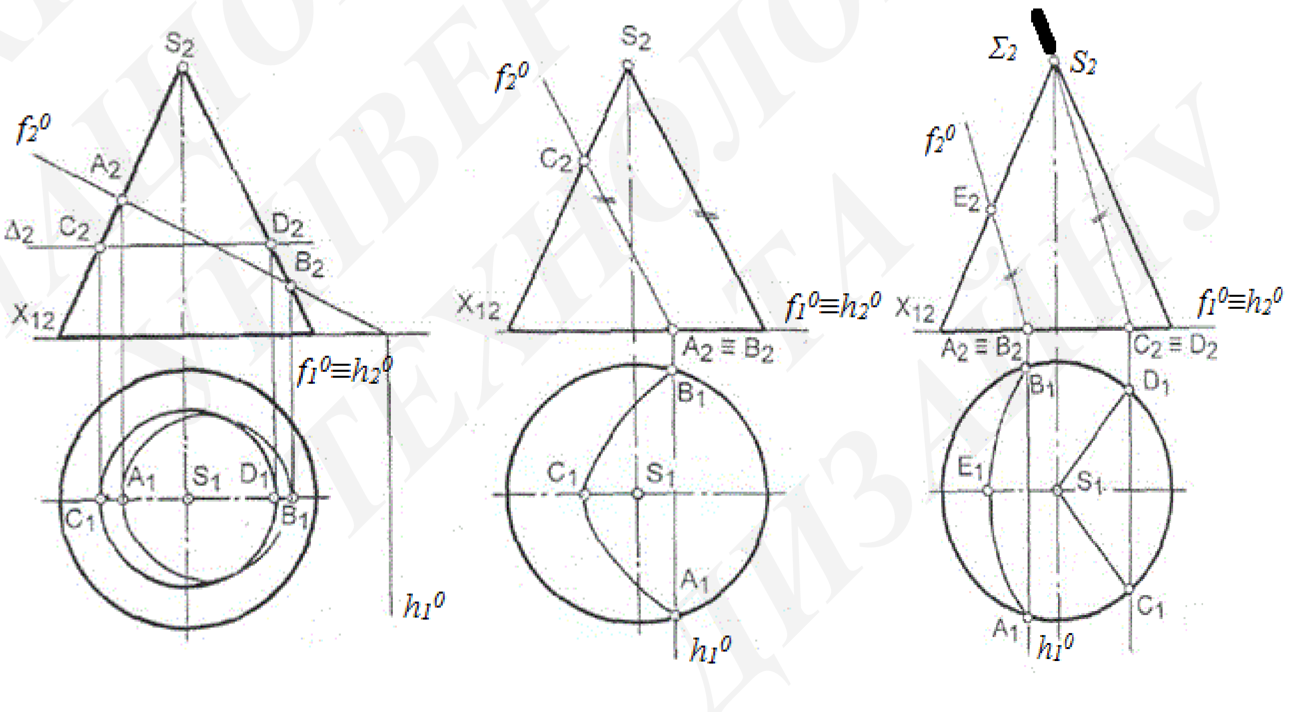
На рис. 8.9 зображено п’ять випадків перетину прямого кругового конуса різними січними площинами.

1. Площина перетинає всі твірні поверхні конуса під кутом до осі конуса – в перерізі утворюється *еліпс*. В особливому випадку, коли площина перпендикулярна осі конуса (паралельно основі) – в перерізі утворюється *коло* (рис. 8.9, *а*).

2. Площина паралельна одній з твірних конуса – в перерізі утворюється *парабола* (рис.8.9, *б*).

3. Площина паралельна двом твірним конуса *SC* і *SD* – в перерізі утворюється *гіпербола* (рис. 8.9, *в*).

4. Якщо площина проходить через вершину конуса, то вона перетинає конус по *двом твірним* – твірні *SC* і *SD* на рис. 8.9, *в*.



а *б* *в*

Рис. 8.9

8.5.2. Лінії циліндричного перерізу

Лінії, отримані при перерізі прямого кругового циліндра другого порядку площинами, називаються *циліндричними перерізами*. Форма кривої залежить від положення січної площини:

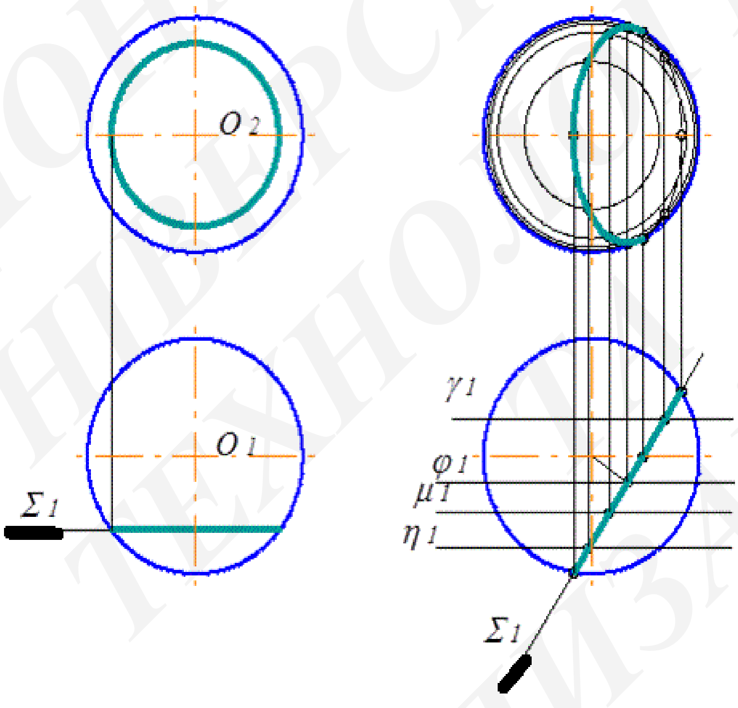
1. Площина перетинає всі твірні поверхні циліндра під кутом до осі циліндра – в перерізі утворюється *еліпс*. В особливому випадку, коли площина перпендикулярна осі циліндра (паралельно основі) – в перерізі утворюється *коло*.

2. Якщо площина проходить паралельно осі циліндра, то вона перетинає циліндра по *двом твірним*.

8.5.3. Лінії сферичного перерізу

Лінії, отримані при перерізі сфери площинами називаються *сферичними перерізами*. Форма кривої – завжди *коло* (рис. 8.10, *а*).

Переріз проекціюється в *натуральну величину* за умовою – січна площина паралельна відповідній площині проекцій(рис. 10.10, *а*). В іншому випадку в перерізі утворюється *еліпс* (рис. 8.10, *б*).



а *б*

Рис. 8.10

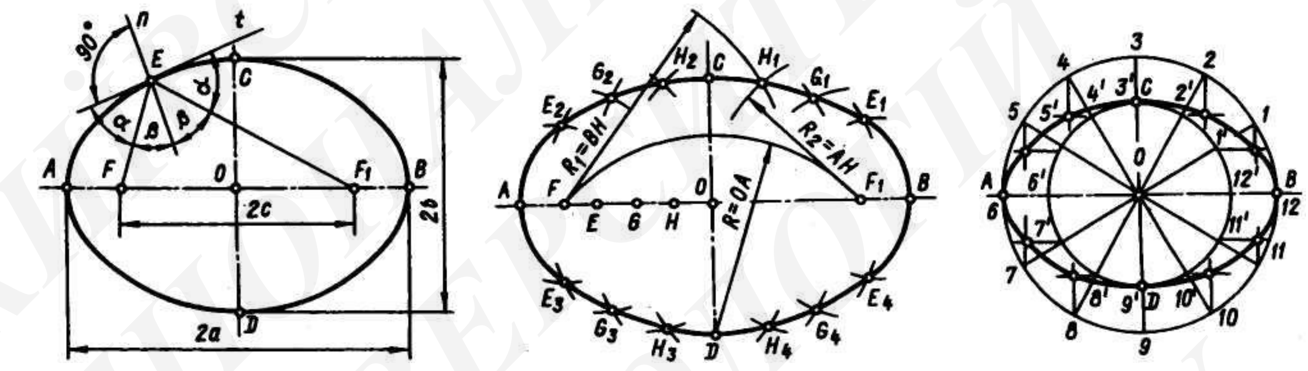
Криві лінії [11]

8.5.4. Побудова кривих другого порядку

Є багато способів побудови кривих другого порядку. Розглянемо деякі з них.

Еліпс (див. рис. 8.11). Це геометричне місце точок на площині, сума відстаней від кожної до двох заданих точок (фокусів) є величина стала, більша за відстань між фокусами і дорівнює $2a$, тобто $FE+EF_1=2a$. Відстань $2c$ між фокусами F і F_1 еліпса має назву фокусної. Точку перетину осей еліпса називають його центром, а точки перетину осей з центром – його вершинами. Відрізки осей, що з'єднують протилежні вершини еліпса і дорівнюють відповідно $2a$ і $2b$, називають великою і малою осями. Відрізки, що сполучають фокуси еліпса з точками кривої, називають радіусами-векторами.

Дотична t до еліпса утворює однакові кути α з радіусами-векторами точки дотику E, а нормаль n ділить кут між радіусами-векторами на однакові кути β (див. рис. 8.11, *а*).



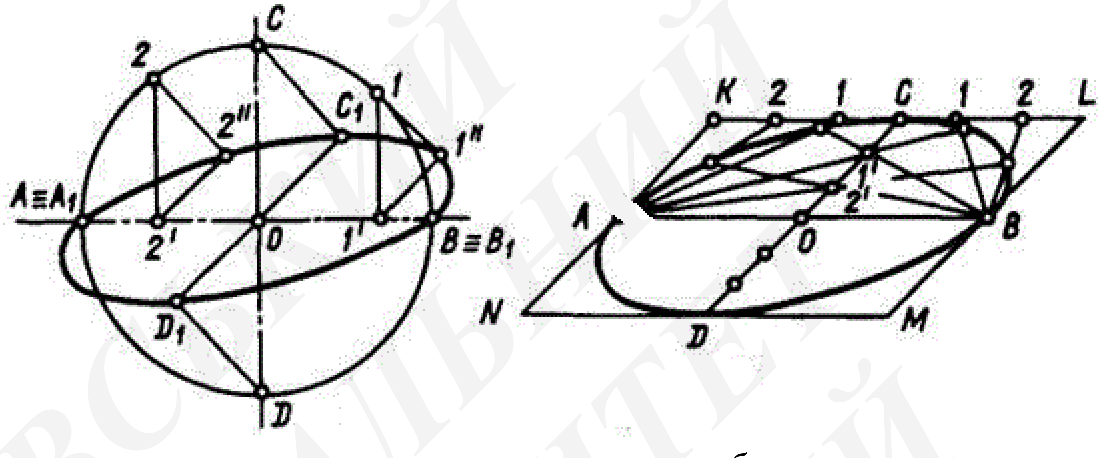
а *б* *с*

Рис. 8.11

Побудова еліпса за двома осями AB і CD (див. рис. 8.11, *б*). З точки D, як з центра, радіусом, що дорівнює половині великою осі, описують дугу кола і визначають фокуси еліпса F і F_1. Між точками F і O намітимо довільні точки E, G, H, кожна з яких дає змогу побудувати чотири точки еліпса. З точок F і F_1, як з центрів, намічаємо засічки радіусами, що дорівнюють відстаням від точки A до вибраної довільної точки і від точки B до тієї ж точки. Сполучивши побудовані точку кривою за допомогою лекала, одержимо еліпс.

На рис. 8.11, *в* представлено, як можна побудувати еліпс за заданими висями, використавши властивості еліпса як проекції кола. З центра еліпса накреслимо два кола, діаметри яких дорівнюють великій і малій висям. З центра накреслимо пучок променів до перетину з колами в точках $1, 2, 3, \ldots$ та $1', 2', 3' \ldots$ З точок $1, 2, 3, \ldots$ будуємо прямі, які паралельні малій осі еліпса, а з точок $1', 2', 3' \ldots$ – паралельні великій осі. Перетин відповідних пар цих прямих визначає ряд точок еліпса. З'єднавши точки лекальною кривою, одержимо шуканий еліпс.

Можна побудувати еліпс і за спряженими діаметрами (рис. 8.12). Спряженими називають такі два діаметри еліпса, кожен з яких ділить навпіл хорди, паралельні іншому діаметру. Спряжені діаметри еліпса можна розглядати і як проекції взаємно перпендикулярних діаметрів кола. Нехай діаметрам кола A_1B_1 і C_1D_1 відповідають спряжені діаметри еліпса AB і CD (рис. 8.12, *а*). З'єднаємо точку C_1 з точкою C. З довільних точок кола *1* і *2* побудуємо прямі, паралельні відрізку CC_1, а з основ перпендикулярів, опущених з точок *1* і *2* на діаметр AB, прямі паралельні OC_1. У перетині одержимо точки, які належать еліпсу.



а *б*

Рис. 8.12

За спряженими діаметрами можна побудувати еліпс і таким способом (див. рис. 8.12, *б*). Через кінці спряжених діаметрів побудуємо паралельні їм прямі. Таким чином утвориться паралелограм *KLMN*. Спряжений діаметр *DC* і сторону паралелограма *KL* поділимо на довільну, але однакову кількість однакових частин. З точок *A* і *B* побудуємо промені через відповідні точки поділу спряженого діаметра і точки паралелограма. Перетин відповідних променів визначить точки еліпса. Побудова нижньої частини еліпса аналогічна.

<u>Парабола</u> є геометричним місцем точок на площині, кожна з яких розміщена на однаковій відстані від фокуса і від прямої (директриси). Параболу можна одержати, перерізуючи круговий конус площиною, яка паралельна одній з його твірних.

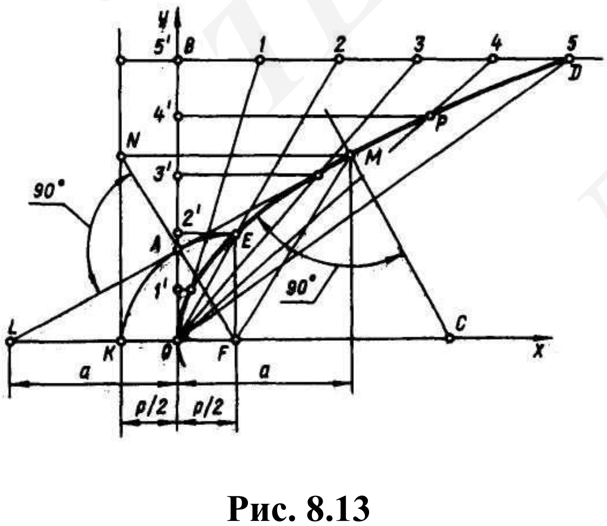


Рис. 8.13

На рис. 8.13 лінія *KN* – директриса, а точка *F* – фокус параболи. Вершина параболи – точка *O* має бути на однаковій відстані від директриси і від фокуса, тобто $KO = OF = p/2$; отже точка *O* міститься на середині відрізка *KF*.

Будь-яка точка параболи міститься на однаковій відстані від фокуса *F* і від директриси *KN*, тобто для будь-якої точки *M* можна записати: $FM = MN$.

На рис. 8.13 виконана побудова параболи за заданою вершиною *O*, віссю *OX* і точкою *P*, що міститься на обрисі параболи. Через точку *O* побудуємо вісь *OY*, а через точку *P* - лінію паралельну осі *OX*. Поділимо відрізок *OB* на кілька частин однакової довжини, наприклад на 5, і на таку ж кількість часток відрізок *BD*. З вершини параболи *O* побудуємо промені до точок *1, 2, 3, 4, 5*, а з точок *1', 2', 3', 4', 5'* – лінії паралельні осі *OX*, до перетину з цими нахиленими променями. Відмічаючи послідовно точки перетину чергового променя з відповідною лінією, паралельною осі *OX*, намітимо точки параболи.

Побудуємо параболу за її фокусом і директрисою (рис. 8.14). Через фокус *F* параболи побудуємо її вісь перпендикулярно до директриси. Поділивши відрізок *FA* навпіл, визначимо вершину параболи *O*. На осі від точки *O* в напрямку фокуса намітимо ряд довільних точок. Через ці точки побудуємо прямі, паралельні директрисі. З фокуса, як з центра, намітимо дуги кіл радіусами, що дорівнюють відстаням між відповідними вертикальними прямими і директрисою. У перетині дуг з відповідними вертикальними прямими визначаються точки параболи.

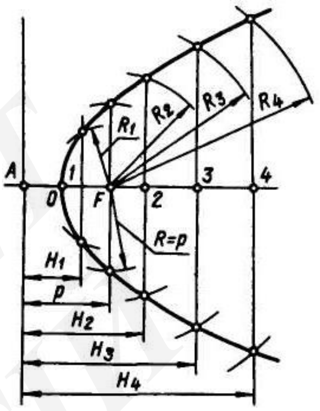


Рис. 8.14

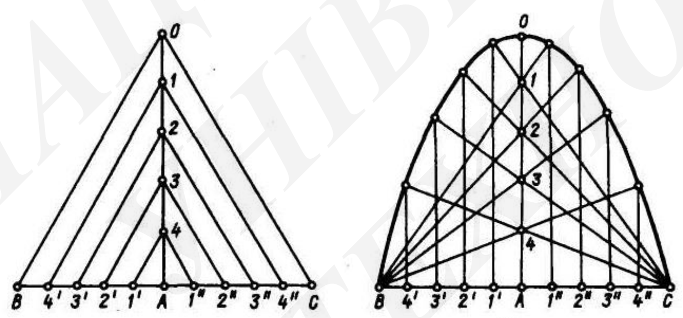


Рис. 8.15

Побудуємо параболу за вершиною *O*, віссю *OA* і хордою *BC* (рис. 8.15). Відрізок на осі параболи поділимо на будь-яку кількість однакових часток. Відрізки *AC* і *AB* поділяють на таку ж
кількість однакових часток.

З точок хорди *1', 2', 3', 4'* побудуємо прямі паралельно осі параболи, а з кінців хорди, точок і – промені через точки на осі *1, 2, 3, 4* до перетину з відповідними прямими, паралельними осі параболи. Побудовані точки визначають параболу.

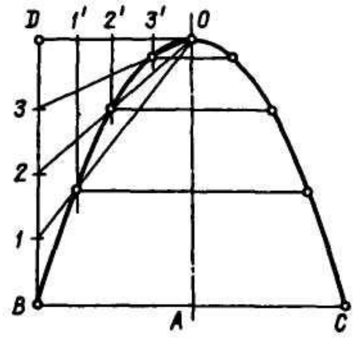


Рис. 8.16

Наведемо ще один спосіб побудови параболи (рис. 8.16). З точок O і B побудуємо взаємно перпендикулярні прямі до перетину в точці D. Відрізки OD і BD поділимо на однакову кількість часток. З точки O будуємо промені в точки поділу на відрізку BD, а з точок поділу на відрізку OD - прямі, паралельні осі параболи. Точки перетину відповідних прямих визначать параболу.

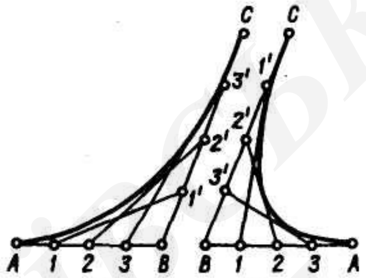


Рис. 8.17

На рис. 8.17 представлена побудова параболи, яка дотична в точках A і C до двох прямих, що перетинаються в точці B. Відрізки AB і BC поділимо на однакову кількість часток і помітимо точки цифрами. Прямі можуть перетинатись під тупим або гострим кутом. Однойменні точки сполучають прямими лініями. За допомогою лекало будують параболу дотичну до побудованих прямих.

Гіпербола є геометричним місцем точок на площині, різниця між відстанями від кожної її точки до двох заданих точок (фокусів) є величина стала.

Гіперболу можна одержати, перерізуючи поверхню кругового конуса площиною, яка паралельна двом його твірним. Гіпербола має два відгалуження. Точки F_1і F_2 – фокуси гіперболи, точки A_1 і A_2 – її вершини. Для будь-якої точки (M) можна записати: $F_2M - F_1M = A_1A_2$. Відстань між вершинами гіперболи A_1 і A_2 є розміром дійсної осі гіперболи – $2a$. Уявна вісь проходить через центр гіперболи O перпендикулярно до дійсної осі. Розмір уявної осі – $2b$.

Побудуємо (рис. 8.18) гіперболу за заданою дійсною віссю A_1A_2 та фокусною відстанню F_1F_2. Описавши на відрізку F_1F_2, як на діаметрі, півколо і опустивши перпендикуляри з точок A_1 і A_2 до осі Ox, одержимо точки C_1 і C_2, які визначать асимптоти гіперболи. Від

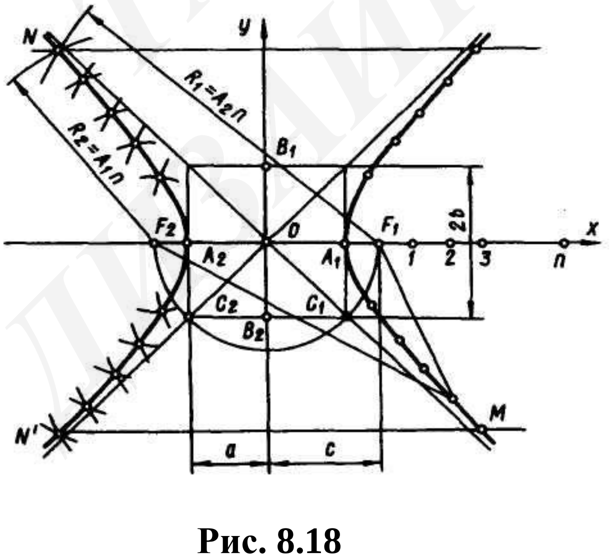


Рис. 8.18

фокуса F_1 праворуч позначимо довільні точки *1*, *2*, *3*, …, *n*.

Далі будуємо точки гіперболи. Для побудови точок N і N' лівого відгалуження гіперболи з фокуса F_1, як із центра, побудуємо дугу радіусом $R_1=A_2n$, а із фокуса F_2 – дугу радіусом $R_2=A_1n$. Точки N і N' гіперболи розміщені в точках перетину побудованих дуг. Аналогічно одержимо інші точки лівого відгалуження гіперболи в точках перетину дуг відповідних кіл, радіуси яких дорівнюють відстаням від вершин A_2 і A_1 до довільно вибраної точки на осі *Ox*. Обидва відгалуження гіперболи розміщені симетрично відносно уявної осі *Oy*, що можна використати при кресленні другого її відгалуження, якщо одне з відгалужень вже побудоване по точках.

На рис. 8.19 побудована гіпербола за заданою вершиною *A* і точкою *C*, яка розміщена на обрисі гіперболи. З точки *C* побудуємо перпендикуляр до напрямку дійсної осі гіперболи *AB* і побудуємо прямокутник *ABCD*. Сторони *CD* і *CB* прямокутника поділимо на однакову кількість часток, наприклад, на чотири. На осі гіперболи позначимо відрізки *OA* = *AB* і побудуємо два пучки променів: з точки *A* до точок поділу *1, 2, 3* і з точки *O* до точок поділу *1′, 2′, 3′*. На взаємних перетинах побудованих променів визначаються точки A_1, A_2, A_3 гіперболи.

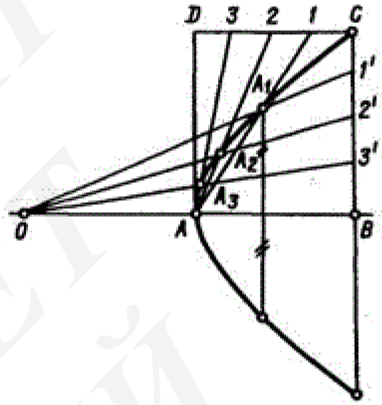


Рис. 8.19

8.6. Просторові криві лінії

Усі точки просторових кривих ліній, на відміну від плоских кривих, *не належать одній площині*. Просторова крива лінія при будь-якому положенні в просторі проекціюється в *криву*.

Тому для задання просторової кривої лінії *n* довільного виду достатньо накреслити горизонтальну і фронтальну проекції її у вигляді довільних кривих (рис. 8.20).

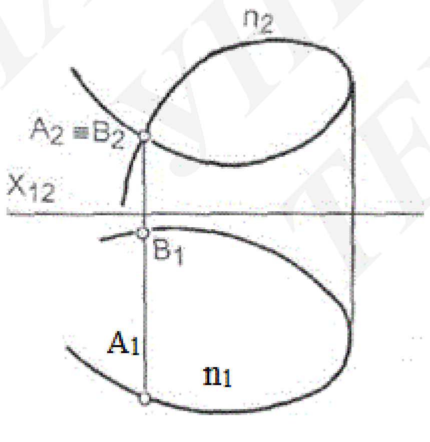


Рис. 8.20

Довжина відрізка просторової кривої визначається шляхом перетворення її в плоску криву з послідовною заміною її ламаною лінією. На рис. 8.21 задані дві проекції просторової кривої *AB*. Позначимо на кривій декілька точок *1, 2, 3, 4, 5*, що визначають форму кривої. На горизонтальній прямій послідовно побудуємо відрізки, довжина яких дорівнює довжині між горизонтальними проекціями відповідних точок.

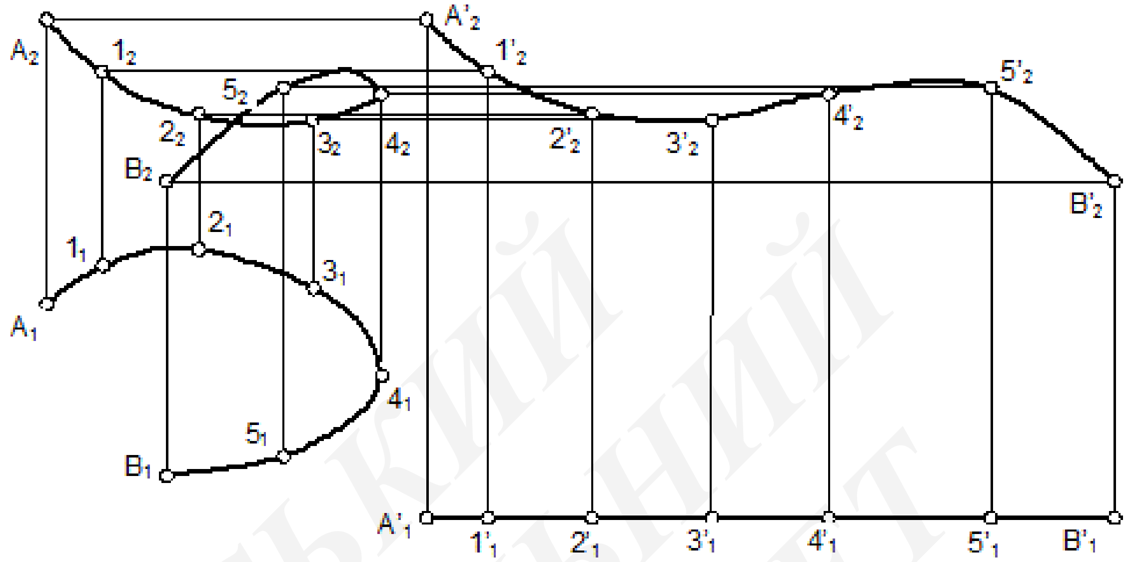


Рис. 8.21

Фронтальні проекції перетвореної кривої побудуємо на перетині ліній зв’язку з горизонтальними прямими, побудованими з відповідних фронтальних проекцій точок. Перетворена фронтальна проекція просторової кривої може бути перетворена в ламану лінію, яка і визначить шукану довжину відрізка просторової кривої.

З просторових кривих найбільше використання в техніці мають *гвинтові лінії* і особливо *циліндричні гвинтові лінії* однакового уклону – *геліси*.

<u>Циліндрична гвинтова лінія</u>. *Циліндричну гвинтову лінію* (*гелісу*) – *розглядають як траєкторію руху точки, яка рівномірно обертається навколо осі і одночасно рівномірно переміщується в напрямку цієї осі*.

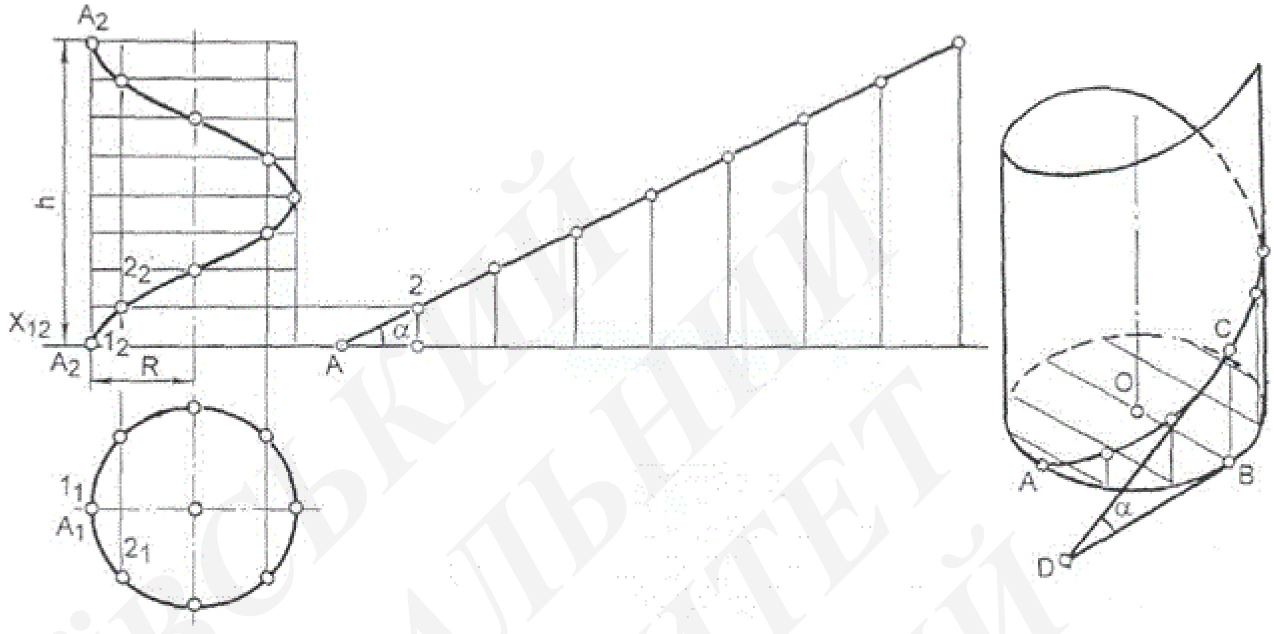
Величину h переміщення точки в напрямі осі, яка відповідає повному оберту навколо осі, називають *кроком гвинтової лінії*.

Властивості геліси використовують при побудові креслення *циліндричної гвинтової лінії.*

На рис. 8.22, *а* побудована циліндрична гвинтова лінія (геліса) заданого *радіусу* та *кроку*. Горизонтальна проекція геліси (коло) поділена на осім рівних частин. На таке ж число рівних частин ділиться її крок. Через точки поділу кола проводять вертикальні прямі (лінії проекціювального зв’язку). Через відповідні точки ділення кроку проводять горизонтальні лінії. Точки перетину цих прямих ліній визначають фронтальні проекції точок циліндричної гвинтової лінії.

Побудова геліси має *правий хід* (направлення), який визначений стрілкою на горизонтальній проекції. Прийнято рахувати, що точка піднімається по траєкторії від площини, яка перпендикулярна осі. Якщо стрілка збігає з напрямком часової стрілки, то ця *циліндрична гвинтова лінія правого ходу*. Якщо стрілка вказує напрямок, зворотний ходу часової стрілки, то *циліндрична гвинтова лінія лівого ходу*.

На рис. 8.22, *б* показана *розгортка* циліндричної гвинтової лінії.



а

б

Рис 8.22

<u>Конічна гвинтова лінія</u>. *Траєкторію точки, яка рівномірно переміщується по твірній одночасно обертаючись навколо осі прямого кругового конуса називається конічною гвинтовою лінією*.

Кроком конічної гвинтової лінії називають величину прямолінійного переміщення точки в напрямку осі конуса при повному її оберті навколо осі.

Конічна гвинтова лінія з постійним кроком проекціюється на площину, перпендикулярну до осі конуса у вигляді *спіралі Архімеда*.

На рис. 8.23 виконана побудова фронтальної та горизонтальної проекцій конічної гвинтової лінії (*спіралі*).

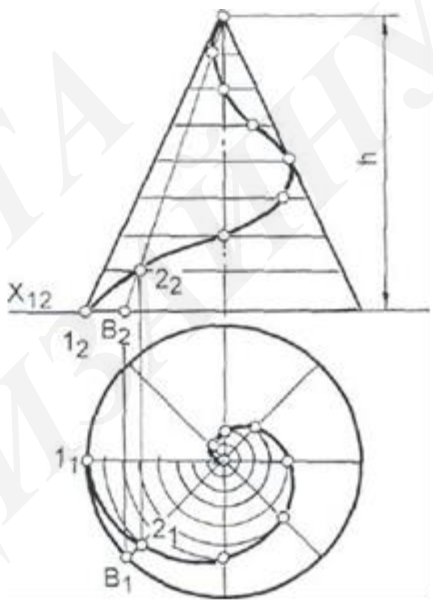


Рис. 8.23

Основа конуса поділена на осім рівних частин. На таке ж число рівних частин ділиться і крок спіралі. На горизонтальній і фронтальній проекціях конуса через точки поділу проводять твірні конуса. Через відповідні точки ділення кроку проводять горизонтальні лінії.

Перетин відповідних проекцій твірних і горизонтальних прямих (перерізів) дають проекції точок конічної гвинтової лінії (спіралі). Так, на фронтальній площині проекцій Π_2 точка 2_2 є перетин проекції твірної S_2B_2 та фронтального сліду січної площини, яка проведена на висоті однієї восьмої кроку спіралі. Горизонтальна проекція точки 2_1 є перетин твірної S_1B_1 і кола горизонтальної проекції перетину площиною Σ, яка пройшла через точку 2_2.

Подальша побудова виконується аналогічно наведеній.

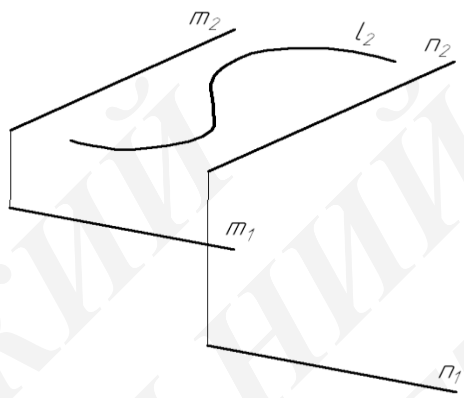
Розглянута конічна гвинтова лінія на рис.8.23 піднімається з права на ліво і називається *лівою спіраллю*. Зворотній хід спіралі – *права спіраль*.

Побудова просторової кривої лінії [12]

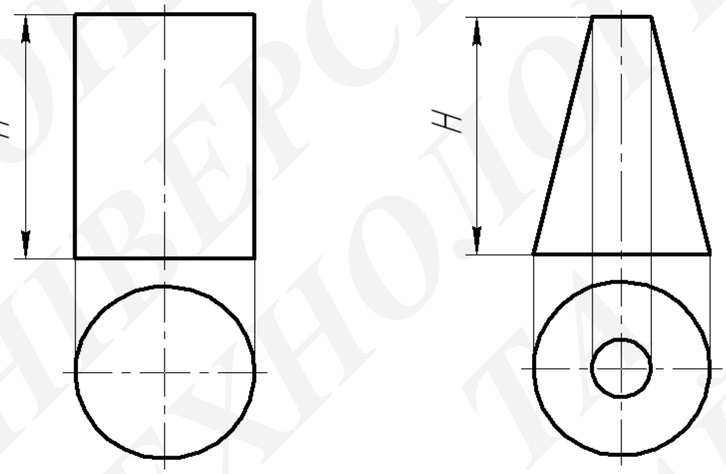
***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. Яка пряма називається січною?
2. Яка пряма є дотичною до кривої?
3. Назвіть особливі точки кривої.
4. Які параметри впливають на форму та розміри еліпса?
5. Яка лінія називається параболою?
6. Яка лінія називається гіперболою?
7. Як утворюються циліндрична та конічна гвинтові лінії?
8. Що таке крок гвинтові лінії – циліндричної та конічної?
9. Який вигляд мають проекції циліндричної та конічної гвинтових ліній на площинах: а) паралельній осі гвинтової лінії; б) перпендикулярній осі гвинтової лінії?
10. Що таке „ліва гвинтова лінія”?
11. Що таке „права гвинтова лінія”?
12. В яку лінію розгортається кожний віток гвинтової лінії – циліндричної та конічної?

13. Побудувати другу проекцію кривої лінії l, яка належить заданій площині.



14. Побудувати праву циліндричну та ліву конічну гвинтові лінії за заданим кроком: *H = 48* мм.



Література по темі лекції:

[9] – с. 52-59.

ЛЕКЦІЯ 9

КРИВІ ПОВЕРХНІ

План лекції:
9. Загальні відомості.
9.1.1. Розгортні поверхні.
9.1.2. Нерозгортні поверхні.
9.1.3. Гвинтові тіла.
9.1.4. Циклічні поверхні.
9.2. Перетин лінійчатих поверхонь проекціювальною площиною.

9.1 Загальні відомості

Можна привести безмежний ряд поверхонь: від елементарної поверхні, що відзначається математичною простотою, до найскладніших форм криволінійних поверхонь, що не піддаються математичному опису. Можна стверджувати, що за різноманітністю форм і властивостей, по своєму значенню при формуванні різних геометричних фігур в науці, техніці, архітектурі, зображувальному мистецтві, дизайні, поверхні не мають собі рівних серед інших геометричних об’єктів.

Основними способами задання поверхні є: *аналітичний, кінематичний, задання поверхні каркасом*.

Поверхня вважається заданою на кресленику, якщо відносно будь-якої точки, заданої на тому ж кресленику, можна однозначно визначити чи належить точка цій поверхні чи ні.

Аналітичний спосіб задання поверхні. Поверхню можна розглядати як геометричне місце точок або ліній. Координати точок цього геометричного місця задовольняють деякому заданому рівнянню.

В математиці поверхню розуміють як безперервну множину точок, якщо між координатами цієї множини має місце залежність, що визначається рівнянням виду $F(x,y,z) = 0$, де $F(x,y,z)$ – многочлен n–го ступеню або в формі будь-якої трансцендентної функції. В першому разі поверхні називають *алгебраїчними*, в другому – *трансцендентними*.

Якщо алгебраїчна поверхня описана рівнянням n–го ступеню, поверхня вважається n–го порядку. Довільна січна площина перетинає поверхню по кривій того ж порядку, який має поверхня. Порядок поверхні може бути визначений числом точок її перетину з довільною прямою, яка не належить поверхні.

Кінематичний спосіб задання поверхні. Поверхню можна представити собі як загальну частину двох суміжних областей простору. В нарисній геометрії поверхня представлена як слід прямої, яка рухається, або іншої поверхні. Уява про поверхню як про сукупність усіх послідовних положень деякої лінії, яка переміщується в просторі, зручно для графічних побудов.

В процесі утворення поверхні ця лінія може залишатися незмінною або міняти свою форму (згинатись чи деформуватись). Для наочності зображення поверхні на площинах проекцій закон руху лінії *a* доцільно задавати графічно, наприклад, як сімейство ліній.

Закон переміщення лінії *a* може бути заданий двома лініями *m* і *n* та додатковою умовою – площиною паралелізму *Σ*, до якої пряма *a* має залишатись весь час паралельною.

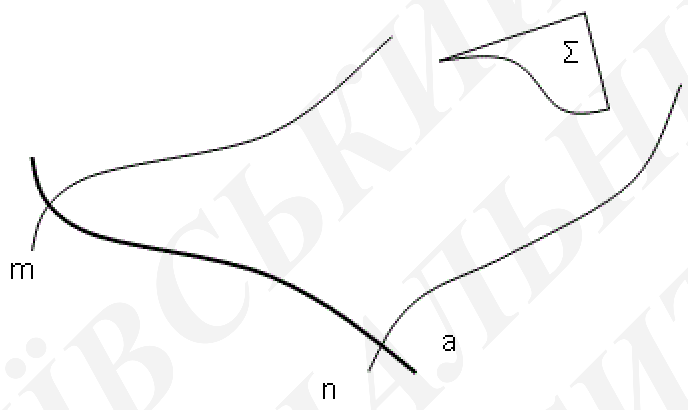


Рис. 9.1

Рухома лінія *a* має назву *твірної*, нерухомі лінії *m* і *n* називають *напрямними*. З рис. 9.1 видно, що твірна *a* рухається по напрямним *m* і *n*, залишаючись паралельною площині паралелізму *Σ*. Такий спосіб утворення поверхні має назву *кінематичного*.

Твірна лінія може бути *прямою* або *кривою*. Кінематична поверхня представляє собою геометричне місце ліній, які рухаються в просторі по деякому закону. Поверхня, яка утворена при наявності такого закону, називається *закономірною*, на відміну від *незакономірних* (або випадкових) поверхонь.

Задання поверхні каркасом – множиною певних ліній, які заповнюють поверхню в кожній точці. Каркаси поверхонь поділяють на *точкові* та *лінійчаті*.

Поверхню задають за допомогою *визначника* – сукупності незалежних геометричних умов, що визначають цю поверхню. Визначник складається з двох частин: *геометричної*, в якій задаються деякі основні елементи та величини, і *алгоритмічної*, яка свідчить про закони зміни форми твірної і її переміщення.

Поверхні, твірними яких є прямі лінії, називаються *лінійчатими*.

Поверхні, твірними яких є криві лінії, називаються криві поверхні – *нелінійчаті*.

Усі поверхні можна поділити на *розгортні* та *нерозгортні*. До розгортних поверхонь належать ті поверхні, які можна сумістити з площиною без розривів та складок. На розгортці всі елементи поверхні зображуються в натуральну величину.

Нерозгортні поверхні – при виконанні розгорток їх не можна сумістити з площиною без деформацій.

На рис. 9.2 наведено одну із можливих схем систематизації поверхонь.

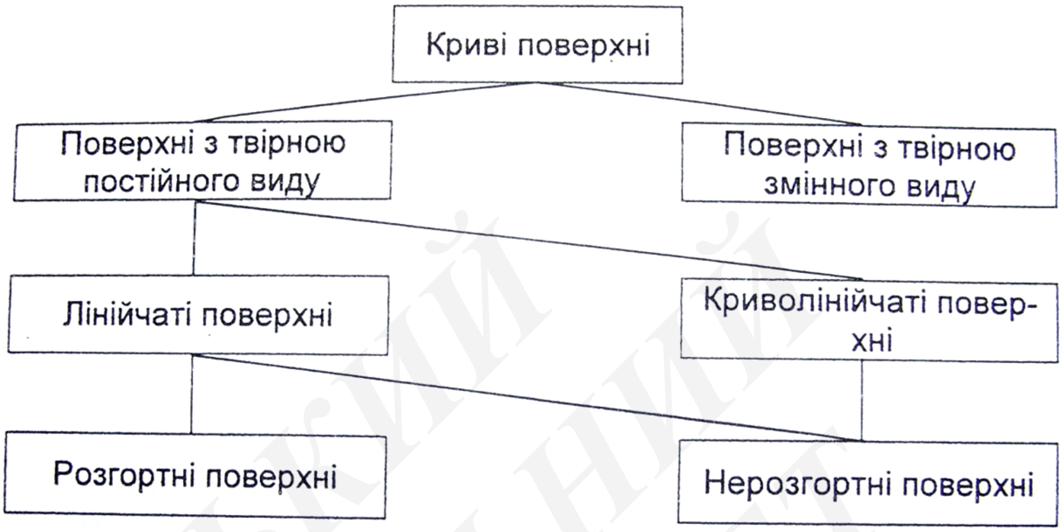


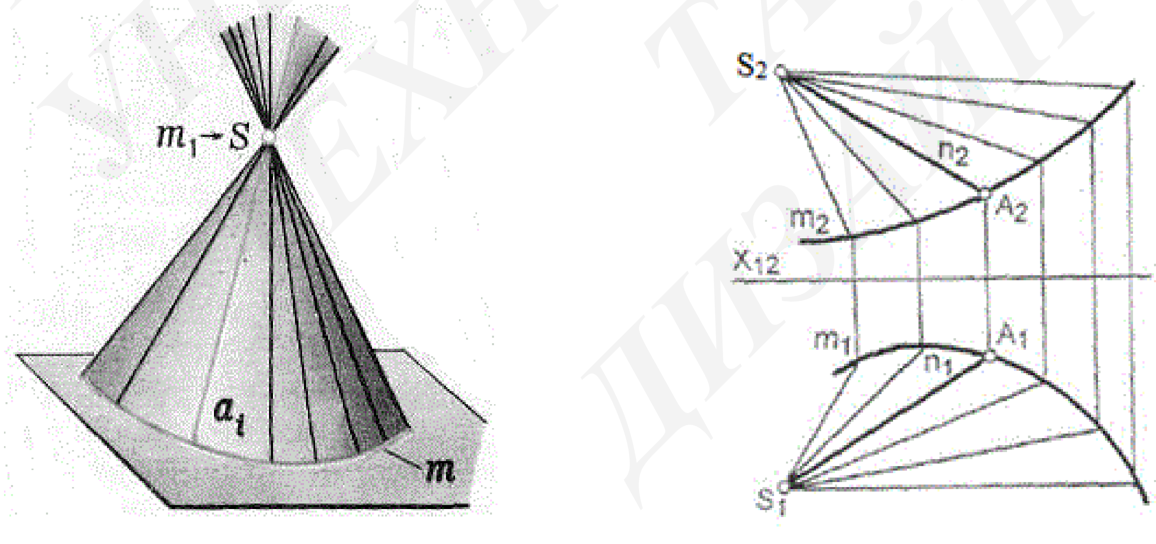
Рис. 9.2

9.1.1. Розгортні поверхні

Якщо дві нескінченно близькі прямолінійні твірні перетинаються у власній чи невласній точці, то поверхня *розгортна*. Якщо не виконуються ці умови, то поверхня *нерозгортна*.

Залежно від характеру твірної, утворюються різні види розгортних поверхонь, до яких відносяться:

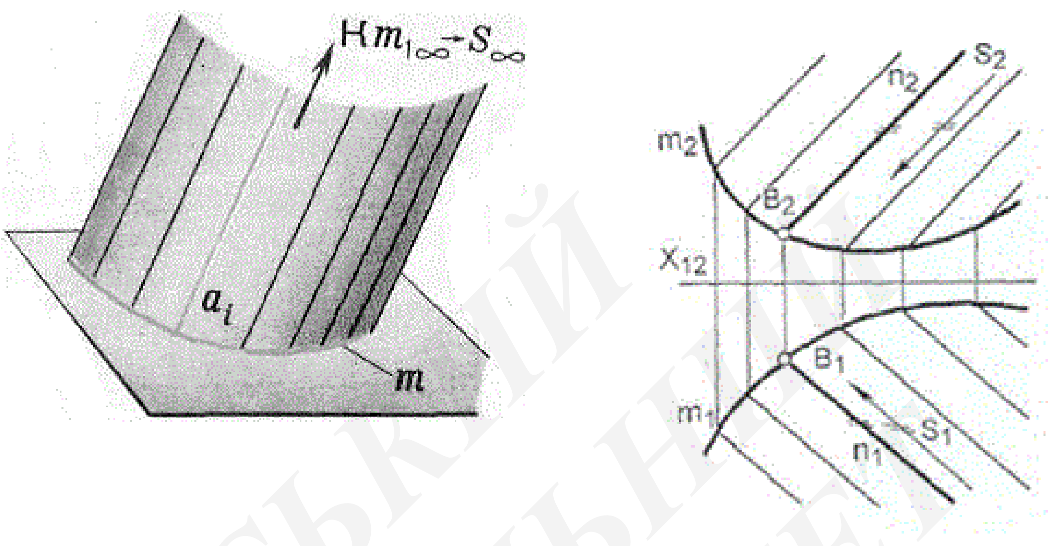
- *конічна поверхня* – утворюється прямою лінією (твірною) n, яка перетинає криву напрямну m і проходить через власну точку S – вершину поверхні (рис. 9.3);



а *б*

Рис 9.3

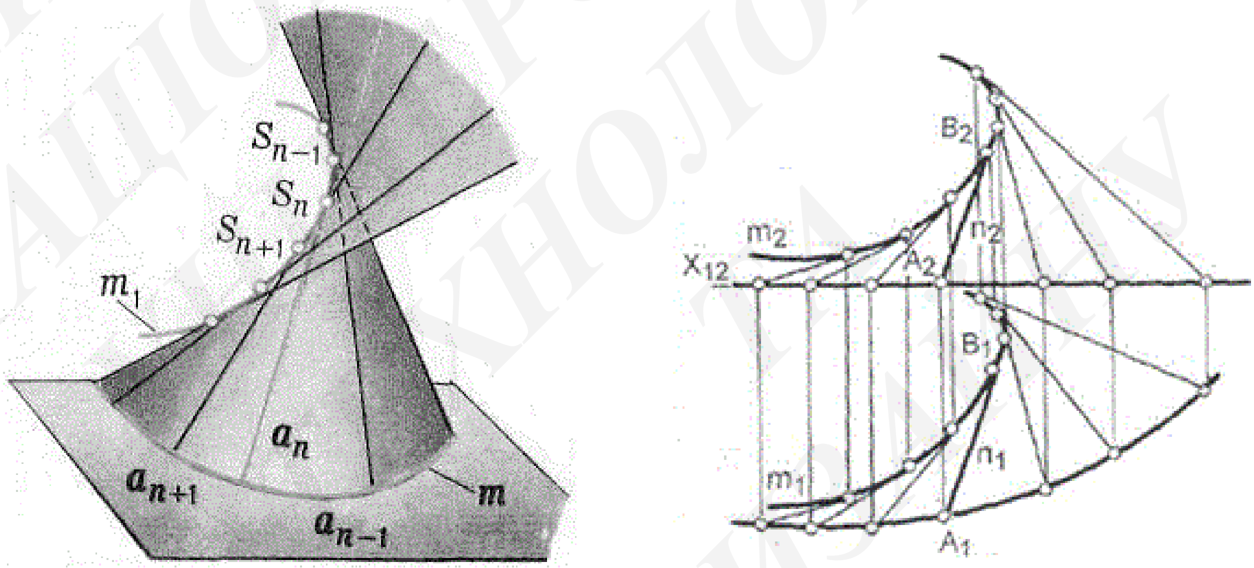
- *циліндрична поверхня* – утворюється прямою лінією n, яка перетинає напрямну m і проходить через невласну точку, задану напрямком S (S_1, S_2) (рис. 9.4);



а *б*

Рис. 9.4

- *поверхня з ребром звороту (торс)*– утворюється неперервним рухом прямої n, яка дотична до деякої просторової кривої m, що називається *ребром звороту* (рис. 9.5).



а *б*

Рис. 9.5

Поверхні з ребром звороту (*торсові поверхні*), можна сумістити всіма точками з площиною без складок і розривів, тобто така поверхня розгортна.

<u>Розгортний гелікоїд</u>. Вид поверхні з ребром звороту залежить від виду самого ребра звороту. Якщо ребром звороту є циліндрична гвинтова лінія m, то твірна t, переміщуючись по ній, залишаючись дотичною до неї, опише (окреслить) гвинтову поверхню, яку називають *розгортним гелікоїдом* (рис. 9.6).

На горизонтальній проекції зображено тільки нижній виток поверхні. Напрям на *m* поділяє поверхню гелікоїда на *дві поли*. На рис. 9.6 показана одна пола, другу полу поверхні отримують подовженням твірної вище точки дотику.

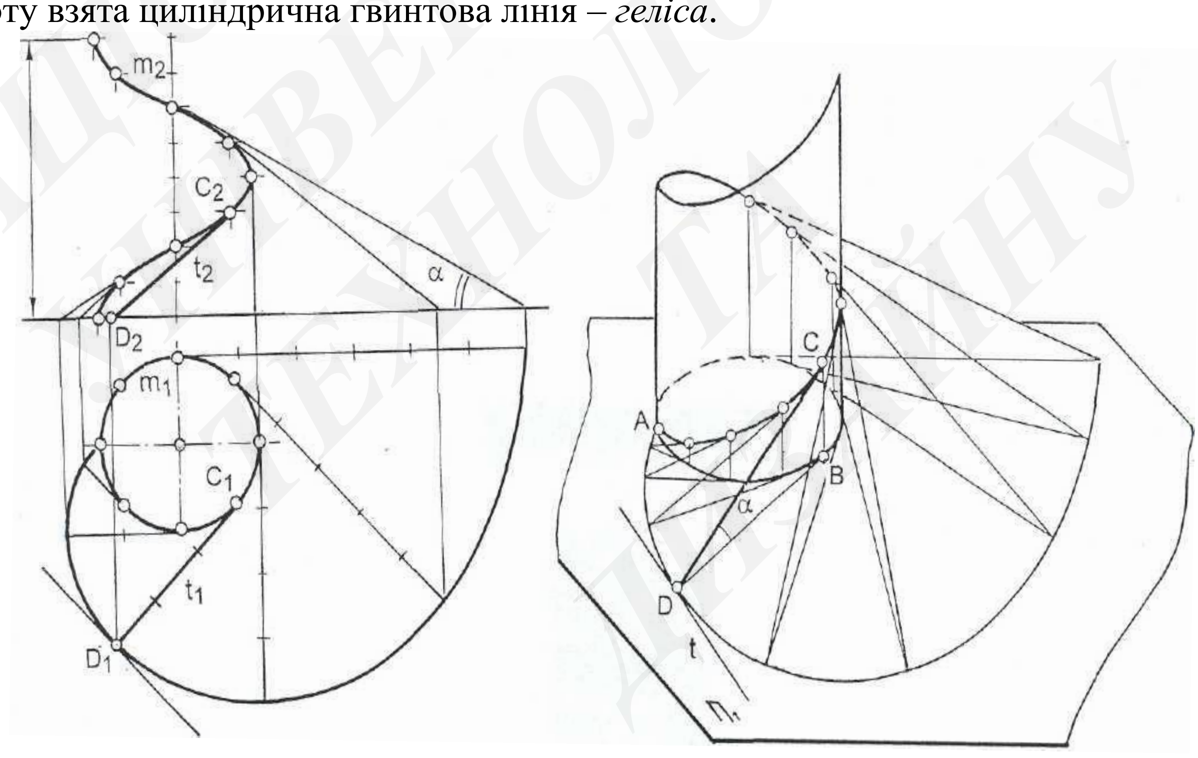
Розглянемо властивість циліндричної гвинтової лінії. Допустимо (див. рис. 9.6, *б*), що до гвинтової лінії в деякій точці *C* проведена дотична, яка перетинає площину $П_1$ в точці *D*.

Кут між гвинтовою лінією і довільною твірною циліндра виявляється кутом між цією твірною і дотичною до гвинтової лінії, яка проведена в точці, спільній для гвинтової лінії і твірної. Розгортка на рис. 9.6, *а* показує, що між даною гвинтовою лінією і твірною циліндра отримується сталий кут.З цього можна зробити висновок – всі дотичні до циліндричної гвинтової лінії однаково нахилені до твірної циліндра і перетинають площину $П_1$ під одним і тим самим кутом α.

Лінія *DC* (рис. 9.6, б) є дотичною до гвинтової лінії в точці *C*. Лінія *DB* – проекція дотичної на площині основи циліндра. З цього виходить, що точка *D* належить евольвенті кола (див. рис. 8.7), так як дотичні в усіх точках циліндричної гвинтової лінії мають сліди на площині основи циліндра, які утворюють евольвенту кола основи цього циліндра.

Скористаємося цим для побудови дотичної до циліндричної гвинтової лінії в деякій її точці.

На рис. 9.6 розглянуто утворення поверхні з ребром звороту. За ребро звороту взята циліндрична гвинтова лінія – *геліса*.



а *б*

Рис. 9.6

Виконують побудову дотичної до циліндричної гвинтової лінії в деякій точці *C*. Спочатку проводять горизонтальну проекцію дотичної t_1 (відрізок D_1C_1) перпендикулярно до радіуса O_1C_1. По точці D_1,на евольвенті будують фронтальну проекцію D_2. Після чого може бути проведена фронтальна проекція дотичної – пряма D_2C_2. Цю побудову повторюють для решти точок геліси.

Побудовані дотичні до циліндричної гвинтової лінії є твірними поверхні з ребром звороту.

Враховуючи сталий кут нахилу твірних поверхні гелікоїда, *ця* поверхня має назву – *поверхня сталого нахилу.*

Поверхня сталого нахилу. Так називають поверхню в якій геометричним місцем прямих, нахилених під сталим кутом до деякої площини і які перетинаються по деякій кривій, яка є *ребром звороту*. Найпростішими поверхнями сталого нахилу є – *прямий круговий конус, розгортний гелікоїд*.

На рис. 9.7 показано особливий випадок утворення такої поверхні – переміщенням кругового конуса (рис. 9.7, *а*), вершина *S* якого ковзає по кривій на прямій *m.* Вісь конуса – вертикальна. Горизонтальна проекція вершини конуса знаходиться на горизонтальній проекції напрямної. Конус, переміщуючись вершиною S_1 по напрямнійm_1 на горизонтальній площині проекцій, описує коло (слід) відповідного радіуса, який залежить від положення вершини конуса відносно площини проекцій $П_1$.

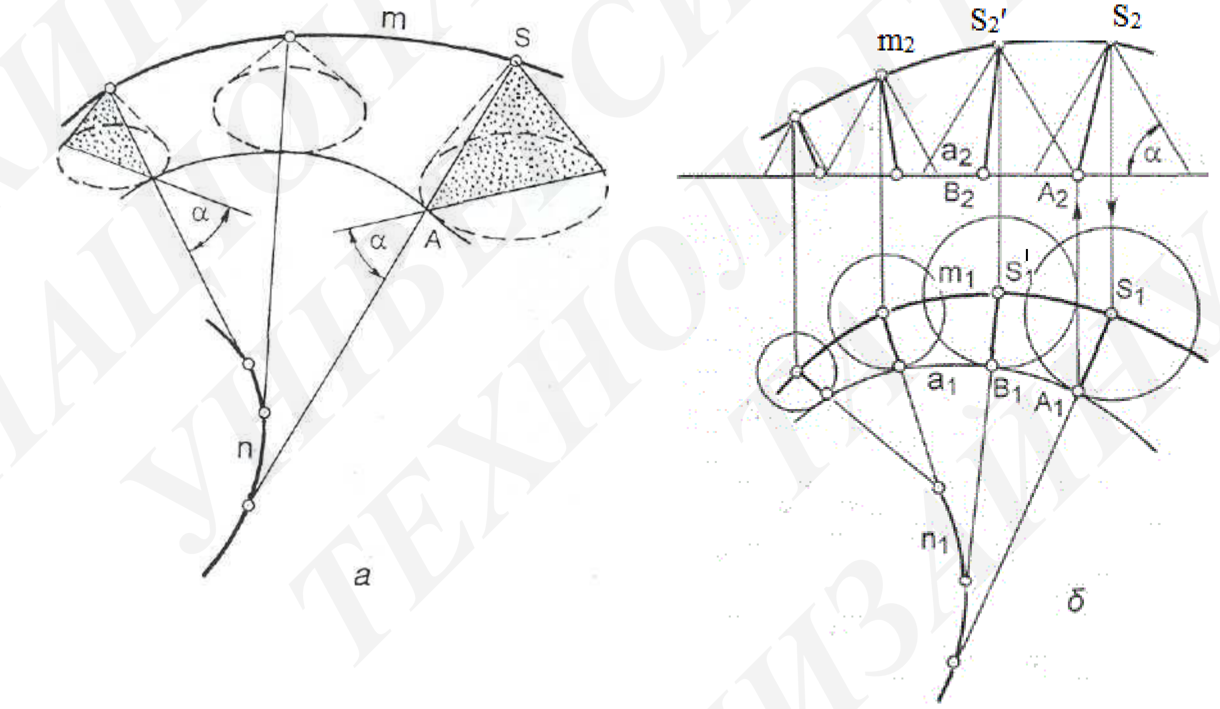


Рис 9.7

Горизонтальним слідом поверхні сталого нахилу буде лінія, яка є обвідною ліній основ конусів – слідів конусів на горизонтальній площині проекцій.

По куту нахилу будують декілька твірних конусів з вершинами на кривій лінії *m* (рис. 9.7, *б*). Лінія, дотична до основ твірних конусів визначає слід поверхні сталого нахилу. Сполучивши точку A_1 дотику сліду поверхні до основи конуса з вершиною конуса, визначають твірну *SA* поверхні сталого нахилу. Так будують решту твірних поверхонь. При подовженні твірних поверхні, суміжні твірні перетинаються і визначають лінію, яка буде *ребром звороту поверхні сталого нахилу*.

9.1.2. Нерозгортні поверхні

Нерозгортні лінійчаті поверхні повністю (однозначно) визначаються на кресленику *проекціями трьох напрямних*. Формоутворення поверхні зводиться до задання закону переміщення прямої твірної по напрямним лініям, які можуть бути *прямими* або *кривими*. В особливих випадках, одна із напрямних ліній може бути замінена *напрямною площиною.* Лінійчаті поверхні з двома напрямними і площиною паралелізму ще називають *поверхнями Каталана*.

Лінійчатий гіперболоїд (однопорожнинний). *Лінійчатим гіперболоїдом називають поверхню, яка утворена рухом прямої твірної по трьом мимобіжним прямим напрямним.*

На рис. 9.8 одно-порожнинний гіперболоїд заданий трьома мимобіжними прямими *а, в, с,* які довільно розміщені в просторі. Для побудови довільної твірної *n* достатньо задати точку *A* на напрямній *в.* Ця точка і напрямна *а* визначають площину $\Sigma(A,a)$. Побудував точку $B = c \times \Sigma$, проводять пряму *AB*, яка є шуканою твірною поверхні. Аналогічно будують решту твірних поверхні однопорожнинного гіперболоїда. Як особливий випадок лінійчатий гіперболоїд може бути *однопорожнинним гіперболоїдом обертання.* Одно порожнинний гіперболоїд обертання може бути утворений обертанням прямої лінії в тому випадку, *якщо твірна і вісь – мимобіжні прямі.*

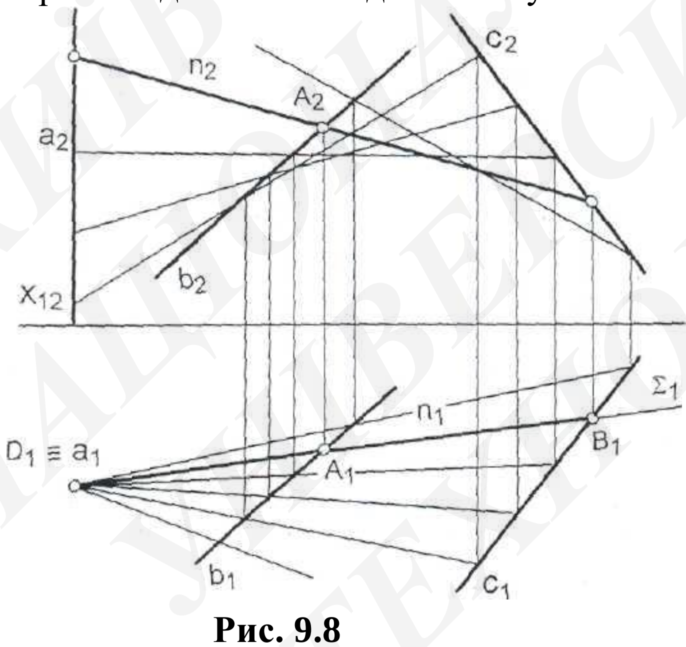


Рис. 9.8

На рис. 9.9 зображено одно-порожнинний гіперболоїд обертання, утворений обертанням прямої *AB* навколо заданої осі, і обмежений двома паралелями.

Через точки на поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання проходить дві твірні, які належать до різних лінійчатих сімей і розташовані під одним і тим же кутом нахилу до осі (на рис. 9.9 – прямі *AB* та *DE*).

Окрім прямих на цій поверхні можуть бути *гіперболи* та *кола*: *гіперболи* – від перетину площинами, які проходять через вісь гіперболоїда; *коло* – від перетину площинами, які перпендикулярні до осі.

Якщо гіперболу обертати навколо осі, утворюється *гіперболоїд обертання* (рис. 9.9, *б*).

Поверхню гіперболоїда обертання можна будувати за допомогою паралелей поверхні з подальшою побудовою обвідної цих ліній.

На рис. 9.10 показано побудову фронтальної проекції однопорожнинного гіперболоїда обертання при заданих осі і твірній *AB*. Перш за все знаходять радіус *горловини поверхні*. Для цього проводять перпендикуляр $O_1 1_1$ до горизонтальної проекції твірної. Цим визначена горизонтальна проекція спільного перпендикуляра до осі і твірної. Проекція $\bar{1}_2 O_2$ – натуральна величина радіуса *горловини поверхні*.

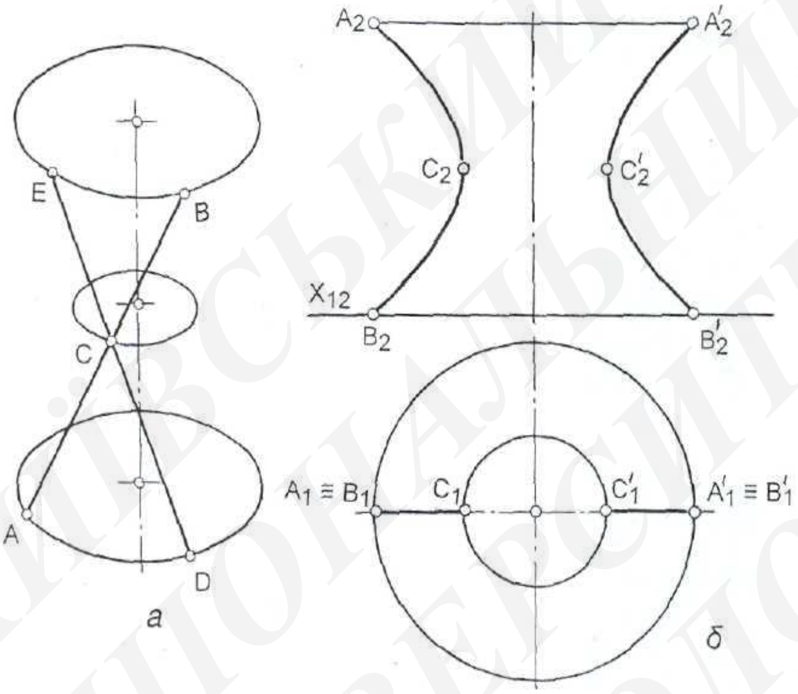


Рис. 9.9

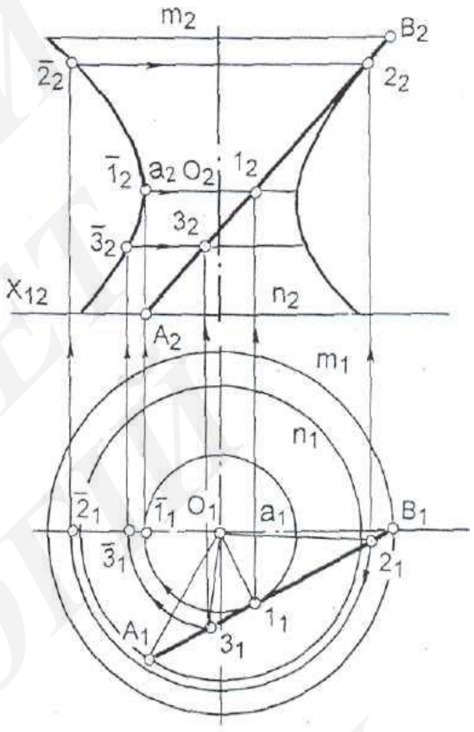
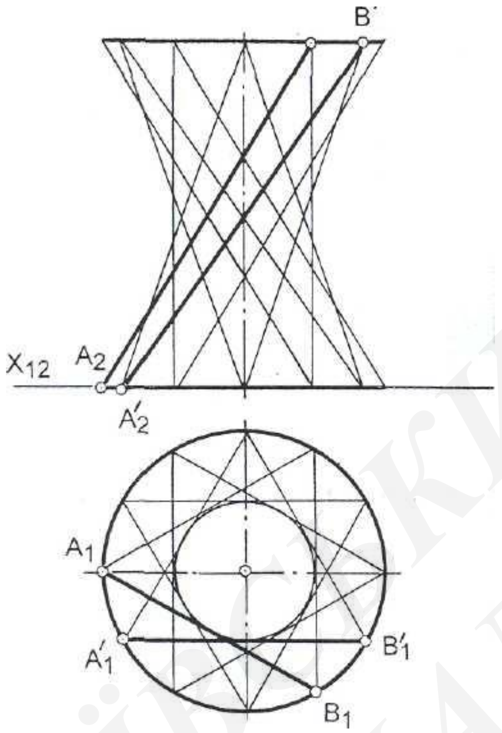


Рис. 9.10

Для побудови фронтальних проекцій паралелей в точках *2* і *3* твірної *AB*, їх проекції $O_1 2_1$ та $O_1 3_1$повертають в положення паралельне фронтальній площині проекцій. Визначають фронтальні проекції $\bar{2}_2$ та $\bar{3}_2$ точок, які належать паралелям в заданих перерізах. Так визначають і інші точки, які належать твірній і через їх фронтальні проекції проводять обвідну лінію фронтальної проекції гіперболоїда. Горизонтальна проекція гіперболоїда обертання буде визначена трьома концентричними колами (m_1, a_1, n_1).

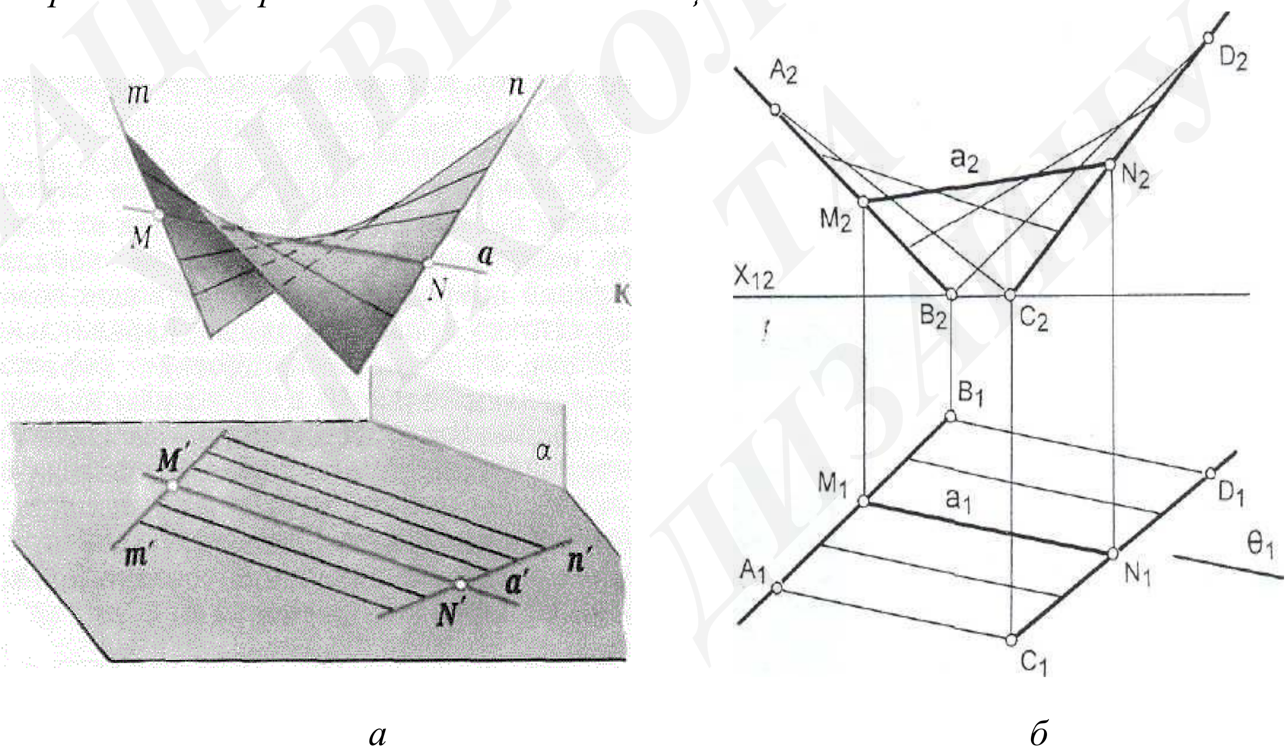
Обертаючи твірну *AB* (рис. 9.10) навколо осі отримують поверхню гіперболоїда обертання визначеного прямолінійною твірною.



Для визначення нового положення твірної *AB* (рис. 9.11) на горизонтальній проекції паралелі відкладають від точок A_1 і B_1 рівні дуги A_1A_1' і B_1B_1'. Точки A_1' та B_1' будуть горизонтальними проекціями точок, які належать твірній. По відповідності будують фронтальну проекцію твірної. Так будують інші твірні поверхні, до яких на фронтальній проекції будують обвідну. Дотичним до горизонтальних проекцій твірних буде коло, яке визначає „горло" поверхні.

Рис. 9.11

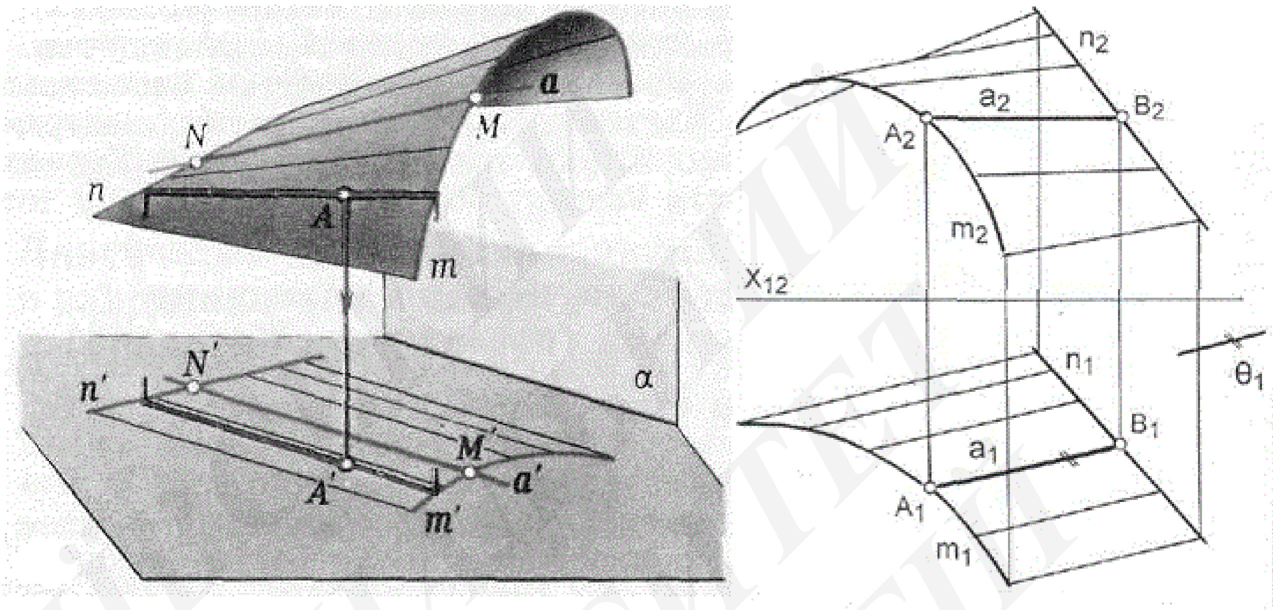
<u>Коса площина</u>. Якщо одна з трьох напрямних прямих розташована в нескінченості, то поверхня, що утворюється при цьому, називається *гіперболічним параболоїдом* або *косою площиною.*



а *б*

Рис. 9.12

На рис. 9.12 зображена коса площина, яка задана двома мимобіжними прямолінійними напрямними відрізками *AB* і *CD* та горизонтально проекціювальною *площиною паралелізму*, яка замінює третю прямолінійну напрямну. Прямолінійна твірна ковзає (переміщується) по прямим напрямним, залишаючись у всіх положеннях паралельною площині паралелізму.



а *б*

Рис. 9.13

Коноїд. Поверхня коноїда утворюється переміщенням твірної по двом лініям (напрямним): одна – *пряма*, друга – *крива*. Твірна залишається у всіх положеннях паралельною *площині паралелізму*.

На рис.9.13 зображено поверхню коноїда загального виду, яка утворена прямолінійною твірною, яка переміщується по прямій та кривій напрямним, і паралельна площині паралелізму.

Гвинтовий коноїд. *Гвинтовим коноїдом* називається поверхня у якої напрямні: *пряма* – вісь циліндра, *крива* – циліндрична гвинтова лінія, *площина паралелізму*– перпендикулярна осі циліндра. Така поверхні називається *прямим коноїдом* або *нерозгортним гелікоїдом* (рис. 9.14).

Якщо поверхню прямого гвинтового коноїда перетнути співвісним циліндром, одержують *кільцевий коноїд* (рис.9.15).

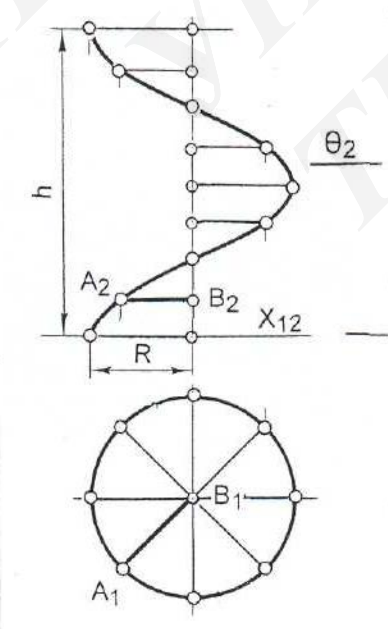


Рис. 9.14

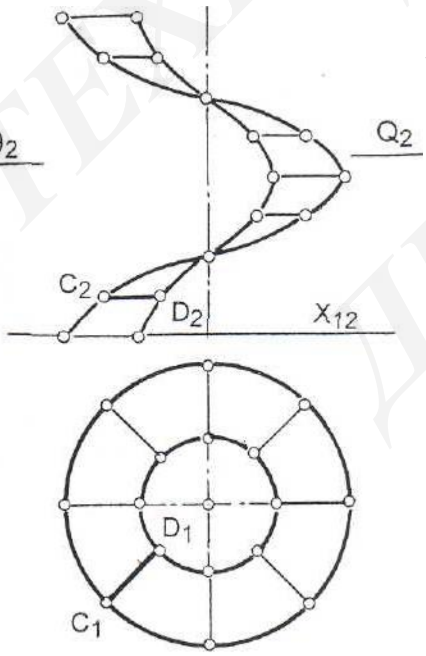
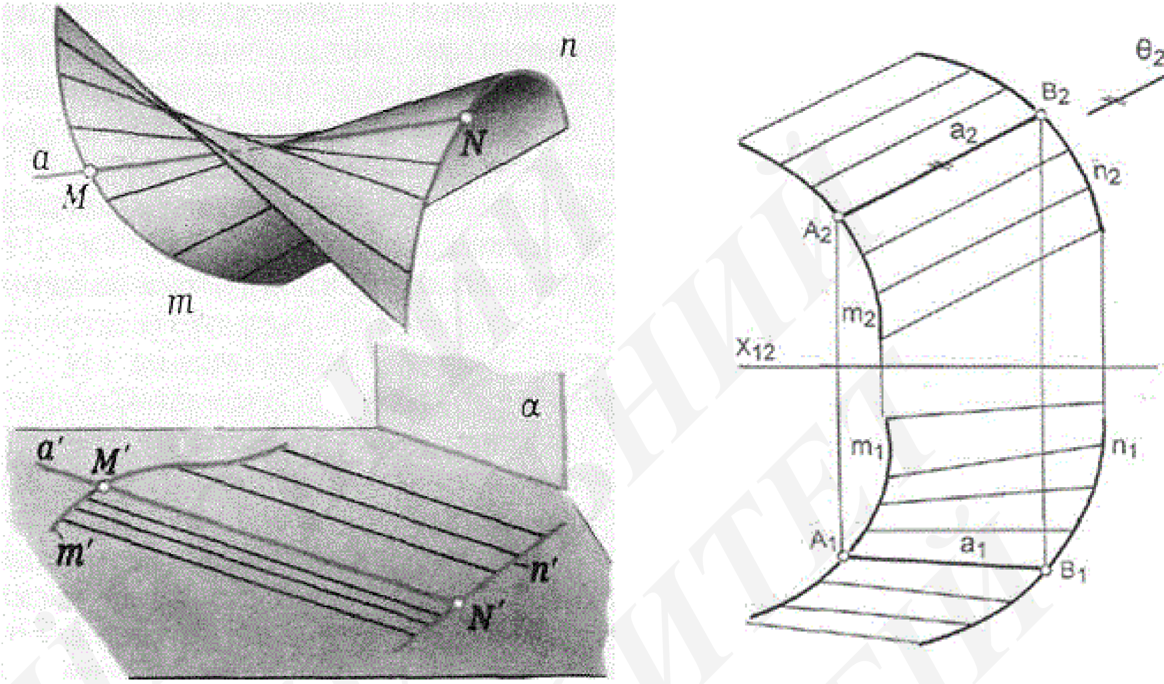


Рис. 9.15

Циліндроїд. Має дві напрямні – криві лінії та площину паралелізму, яка замінює невласну пряму.



а *б*

Рис. 9.16

На рис. 9.16 зображено *циліндроїд загального виду*. Напрямні: дві криві лінії *m* і *n* та фронтально проекціювальна площина паралелізму. Твірні циліндроїда у всіх точках напрямних паралельні до площини паралелізму.

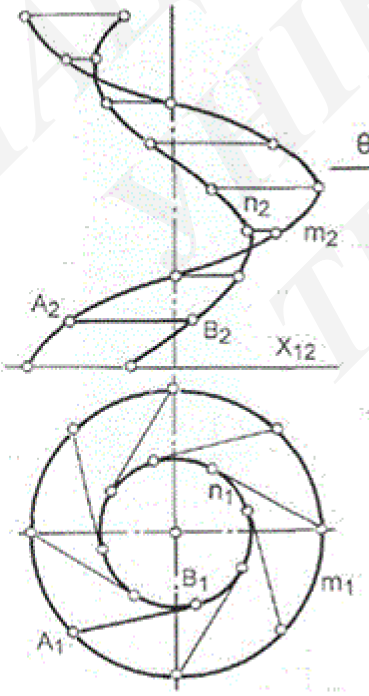


Рис 9.17

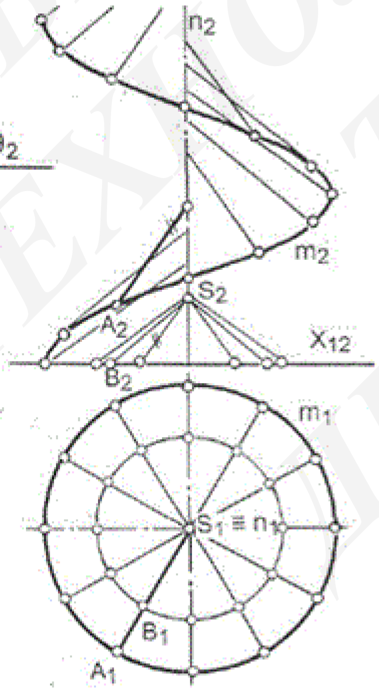


Рис 9.18

Гвинтовий циліндроїд (рис. 9.17)має дві співвісні геліси *m* та *n* та фронтально проекціювальну площину паралелізму O_2, яка перпендикулярна до осі циліндра.

Внутрішня геліса *n* утворюється точками перетину твірних, що проходять через точки зовнішньої геліси *m*. Для побудови гвинтового циліндроїда необхідно задати зовнішню гелісу. Внутрішня геліса визначається твірною, яка перетинає внутрішній циліндр або ж дотична до нього.

Косий циліндр з трьома напрямними. *Косий циліндр* (*гелікоїд*) є поверхня, яка утворена переміщенням прямолінійної твірної *a* по напрямним: гвинтовій циліндричній лінії та її осі, яка в усіх точках паралельна поверхні співвісного конуса (невласна крива). На рис. 9.18 зображено косий гелікоїд.

Горизонтальні проекції твірних гелікоїда і відповідних твірних співвісного напрямного конуса співпадають, а фронтальні проекції їх паралельні.

Горизонтальна проекція поверхні косого гелікоїда – *коло*. Для побудови фронтальної проекції твірної через довільну точку A_1 на гелісі та осі циліндра (напрямну поверхні) проводять площину Σ, яка перетинає конус по твірній *SB*. Через точку A_2 проводять твірну поверхні паралельно твірній конуса S_2B_2. Так як всі твірні поверхні гелікоїда паралельні твірним конуса і мають сталий кут нахилу до площини Π_1, то вони перетинають вісь геліси через однакові проміжки.

Криві другого порядку [13]

9.1.3. Гвинтові тіла

Подібно тому, як при гвинтовому переміщенні точки утворюється гвинтова лінія і при гвинтовому переміщенні відрізка прямої визначається гвинтова поверхня, можна отримати гвинтове тіло, якщо переміщати будь-яку плоску фігуру (наприклад коло, прямокутник, трикутник, трапецію) так, щоб вершини цієї фігури (для кола – центр кола) переміщувались по гвинтовим лініям, а площина самої фігури постійно проходила через вісь циліндра. Таким чином утворюється *гвинтовий виступ*. Побудова проекцій такого гвинтового виступу зводиться до побудови стількох гвинтових ліній, скільки вершин у вибраної фігури.

Якщо поверхня утворюється рухом кола, площина якого в кожній точці проходить через вісь циліндра, то воно зображується на площині Π_2 еліпсами. Для простоти побудови контуру поверхні, за її твірну беруть сферу, діаметр якої дорівнює діаметру кола. Переміщуючи центр сфери по гелісі, будують обгортну поверхню сфер (рис. 9.19). цю поверхню називають *гелікоїдальним циліндром*.

На рис. 9.20 показано побудову гвинтового виступу, утвореного рухом квадрата. Квадрат весь час примикає однією своєю стороною до твірної циліндра: вершини квадрата переміщуються по гвинтовим лініям. *Сукупність циліндра і гвинтового виступу на ньому називають гвинтом.*

Гвинт зображений на рис. 9.20 має *квадратну різьбу.* Якщо замість квадрата взяти трикутник і переміщувати його уздовж циліндра так саме, як це було зроблено з квадратом, то отримаємо гвинт з *трикутною* різьбою (рис. 9.21).

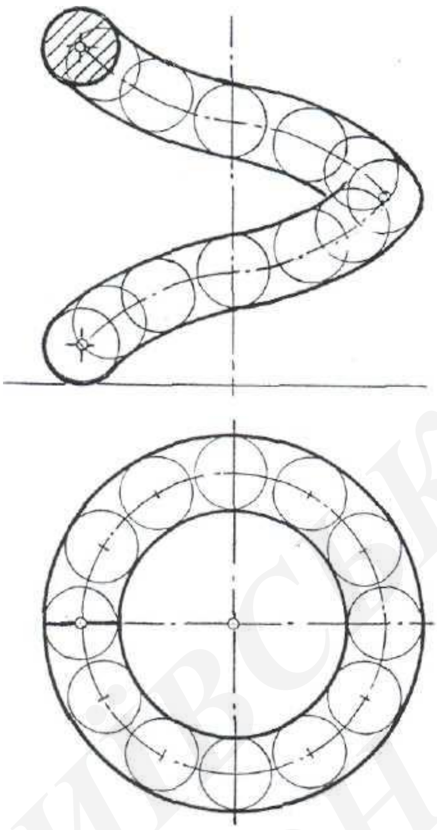


Рис. 9.19

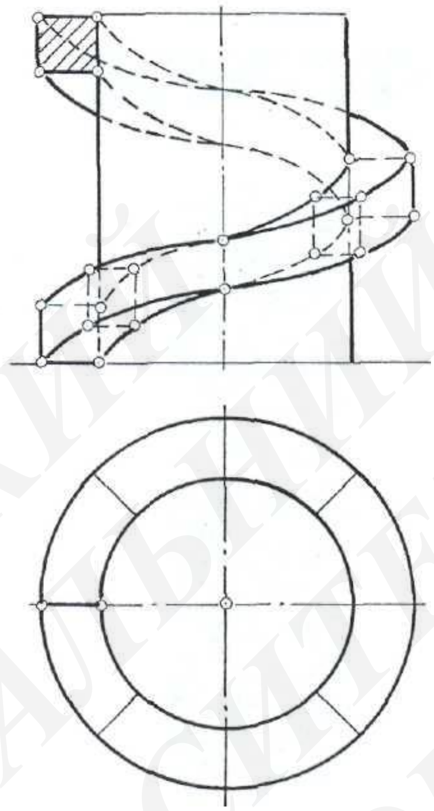


Рис. 9.20

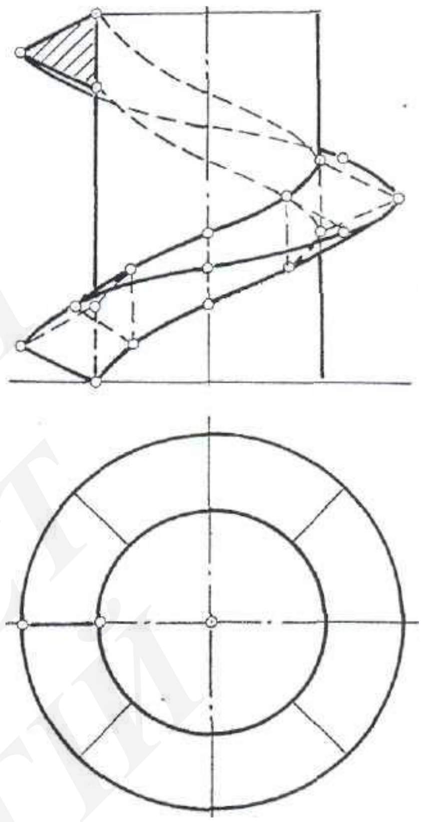


Рис. 9.21

9.1.4. Циклічні поверхні

Циклічні поверхні утворюються рухом кола сталого або змінного радіуса *за певним законом* (рис. 9.22). Циклічними вважаються будь-які поверхні обертання, а також *каналові* і *трубчасті поверхні*.

Поверхню загального виду можна задати твірною, законом зміни її форми в процесі просування і законом переміщення твірної в просторі.

Циклічна поверхня має змінну твірну – *коло*. Його центр переміщується по кривій напрямній. Ця поверхня називається *каналовою.* Вона утворюється рухом по напрямній кривій кола або сфери змінного радіуса, причому площина твірної кола перпендикулярна до напрямної кривої лінії (рис. 9.21).

Каналова поверхня може бути подана як обгортну сімейства сфер змінного радіуса, центри яких знаходяться на напрямній кривій лінії.

Каркас каналових поверхонь складається з послідовного ряду кіл перемінного радіусу

На рис. 9.23 показана циклічна поверхня, її твірною є коло змінного радіуса. Залежності $R = f(\beta)$ та $S = F(\beta)$ визначають циклічну поверхню.

Довільну поверхню, для якої знайдено простий закон її утворення, називають *графічною.* Вона задаються на кресленні рядом перерізів паралельними площинами, які розміщені друг від одного на одиницю зміни.

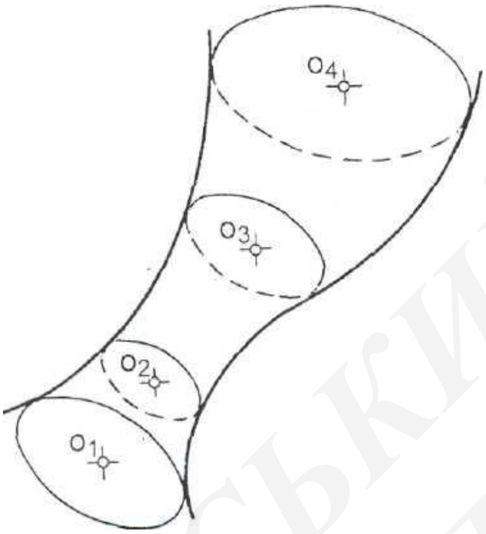


Рис. 9.22

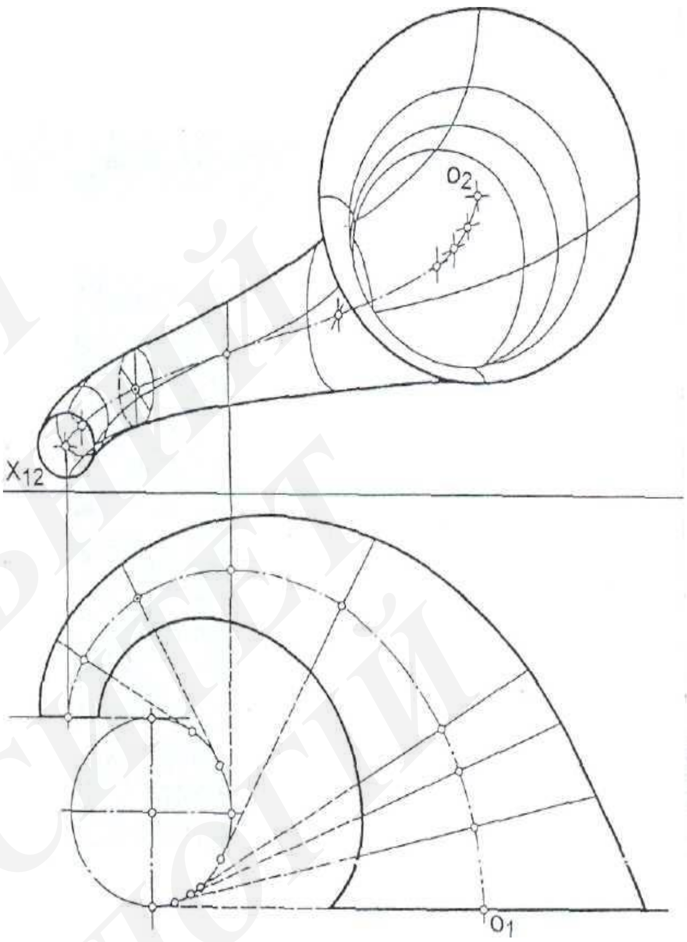


Рис. 9.23

Для *трубчастої поверхні* твірною є коло з постійним радіусом (рис. 9.24).

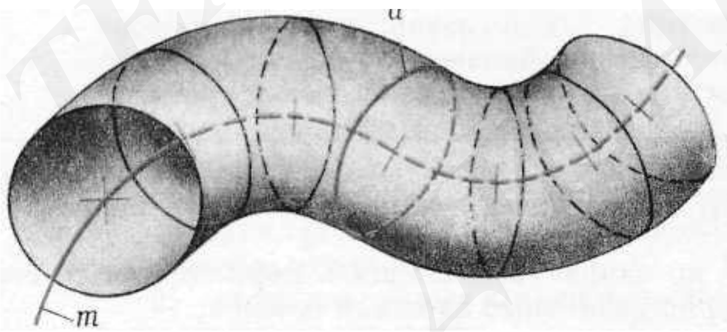


Рис. 9.24

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. Яка поверхня називається лінійчатою?
2. Яка поверхня називається не лінійчатою?

3. Які є способи задання поверхні?

2. Скільки прямих твірних проходить через довільну точку гіперболічного параболоїда?

3. Побудуйте конічну поверхню за довільною напрямною та довільною вершиною *S*.

4. Побудуйте циліндричну поверхню за довільною напрямною та довільним напрямом *m* твірних.

5. Побудувати проекції розгортного кільцевого гелікоїда за даними: діаметром горизонтальної проекції гвинтової лінії – 40 мм, діаметром основи січного співвісного циліндра – 20 і кроком – 80 мм.

Література по темі лекції:

[9] – с. 61-74.

9.2. Перетин лінійчатих поверхонь проекціювальною площиною

Лінією перетину лінійчатої поверхні площиною в загальному випадку є плоска крива лінія.

Для визначення кривої лінії перерізу лінійчатої поверхні площиною, необхідно в загальному випадку будувати точки перетину твірних поверхні з січною площиною, тобто знаходити точки перетину прямої з площиною. Шукана крива перерізу *(лінія перерізу)* проходить через ці точки.

Обов'язково визначають так звані „*характерні точки*" (див. рис. 9.25):

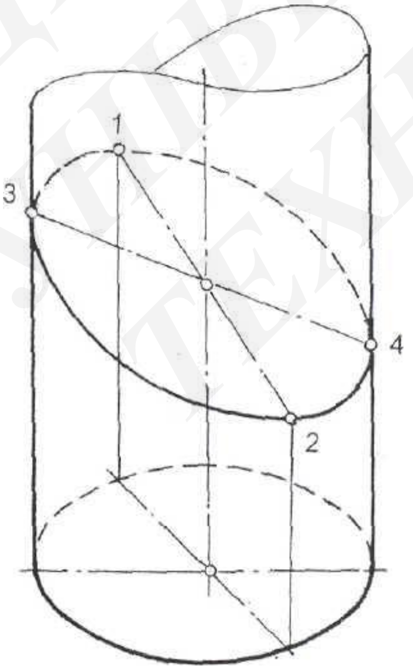


Рис. 9.25

Точки 1 та 2 – відповідно верхні і нижня точки перерізу, а точки *3* та *4*, точки перетину осьових твірних, – відповідно перехід видимої частини перерізу (від *3* до *4*) – в невидиму частину перерізу (від *4* до *3*).

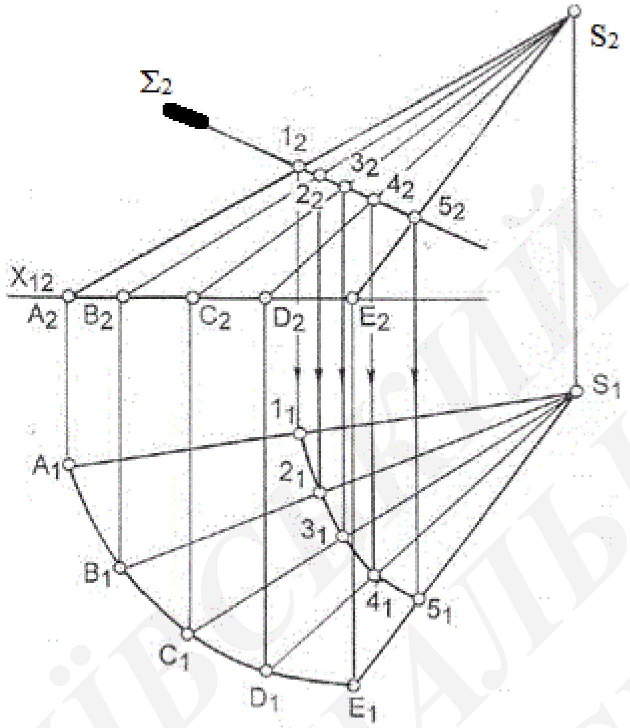


Рис. 9.26

На рис. 9.26 зображена конічна поверхня, яка перетинається фронтально проекціювальною площиною Σ_2. Фронтальна проекція лінії перерізу конічної поверхні площиною співпадає з слідом Σ_2 площини. Горизонтальна проекція лінії перерізу проведена через горизонтальні проекції точок перетину ряду твірних конічної поверхні з площиною Σ.

В цьому прикладі задача на побудову лінії перерізу поверхні площиною спрощується завдяки тому, що площина Σ особливого положення.

За умовою (рис. 9.27), поверхню похилого конуса, основа якої належить площині Π_1 перетинає фронтально проекціювальна площина Δ. Коли січна розташована під кутом до осі симетрії то в перерізі утворюється *еліпс*.

Площина Δ проекціюється на площину Π_2 в пряму лінію Δ_2, в яку проекціюється і сам переріз. Тобто переріз збігається зі слідом січної площини.

На відміну від перерізу граної поверхні, при перетині кривої визначаємо точки перерізу твірних конуса січною площиною Δ.

Будуємо допоміжні проекції твірних (не менше шести) для яких визначаємо точки перерізу. В загальному вигляді, поверхня конуса утворена переміщенням прямолінійної твірної за умовою, що один її кінець не рухомий, а інший переміщується по криволінійній напрямній. В нашому випадку в якості напрямній виступає коло.

Обов'язково будуємо проекції твірних які є контурними на горизонтальній площині проекцій Π_1. Вони будуть визначати точки переходу видимої частини перерізу в невидиму. Точки перерізу на контурних твірних для фронтальної площини проекцій Π_2 визначать нижню і верхню точку перерізу.

Визначивши точки перетину твірних зі слідом січною площини Δ_2 за відповідністю визначаємо їх горизонтальні проекції.

Контурна твірна *SA* перетинається січною площиною в точці *1* (тобто її проекція перетинається січною площиною в точці 1_2). Інша контурна твірна перетинається січною площиною точці 6_2, а проміжні контурні твірні в точках 2_2, 3_2, 4_2, 5_2. Кожну точку проекціюємо на горизонтальну проекцію тієї твірної якої вони належить.

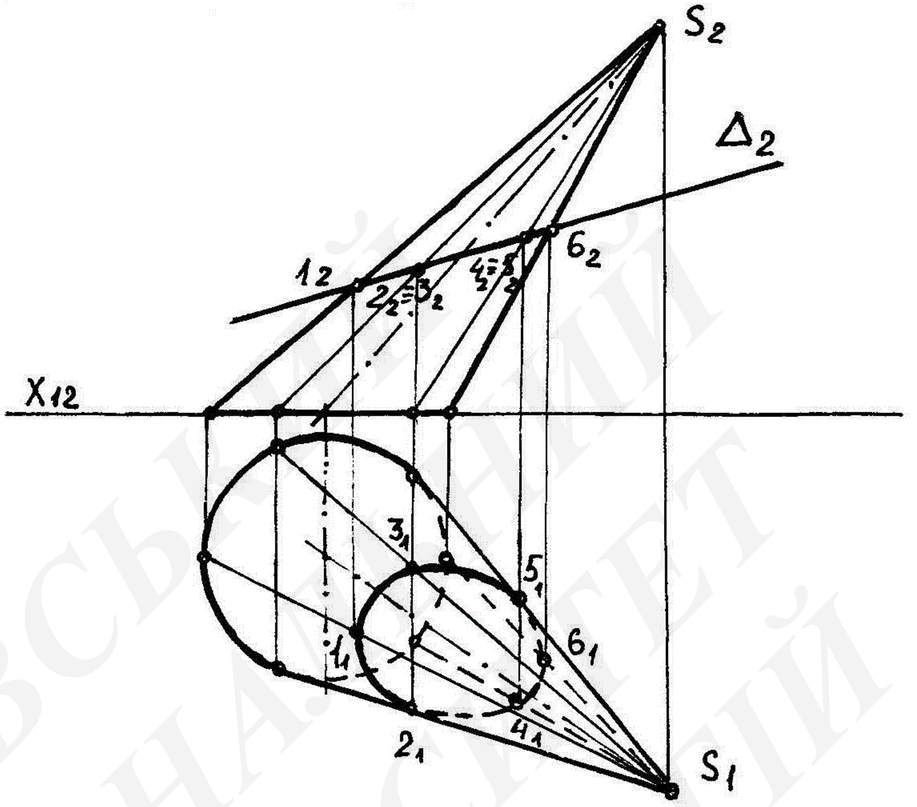


Рис. 9.27

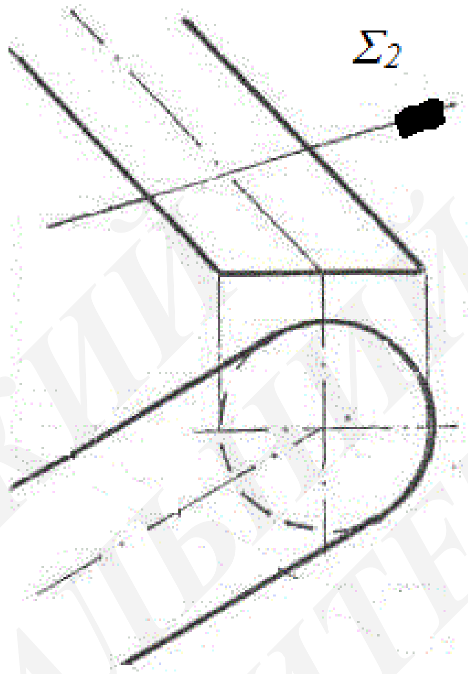
На наступному етапі треба визначити видимість перерізу (його елементів) на площинах проекцій. Якщо точки лінія перерізу розташовані на твірних, які проекціюється на площину проекцій як видимі, то і лінія перерізу зображується як видима.

Твірні з точками перерізу $1_1 3_1$ з'єднують вершину конуса з видимою частиною основи, тому і лінія перерізу на площині проекцій $П_1$ зображується як видима, тому що твірні зображені як видимі.

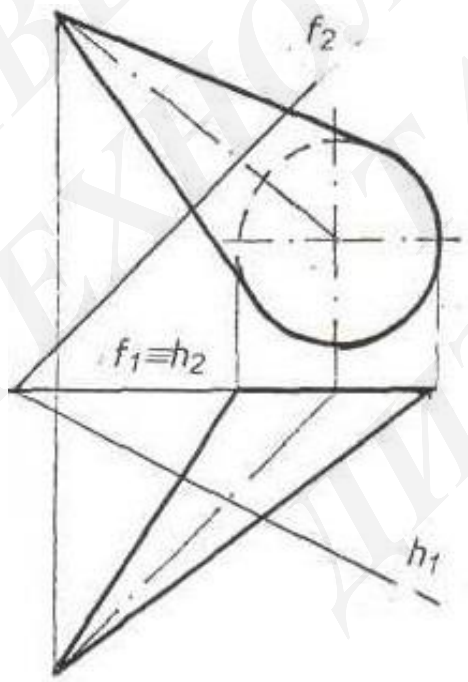
Твірні з точками перерізу $4_1 6_1$ з'єднують вершину конуса з не видимою частиною основи, тому і лінія перерізу на площині проекцій $П_1$ зображується як не видима, тому що твірні зображені як не видимі.

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. По яким лініям перетинається крива поверхня січною площиною?
2. Які фігури утворюються при перетині поверхні циліндра січною площиною в залежності від її положення відносно його осі?
3. Які фігури утворюються при перетині поверхні конуса січною площиною в залежності від її положення відносно його осі?
4. Як в загальному випадку будується лінія перетину кривої поверхні січною площиною?
5. Як в загальному випадку будується лінія перетину циліндра (конуса) січною площиною?
6. Побудувати переріз заданого тіла обертання, коли січна площина займає проекціювальне положення.



7. Побудувати переріз заданого тіла обертання, коли січна площина задана своїми слідами $f^o h^o$.



Література по темі лекції:

[9] – с. 61-74.

ЛЕКЦІЯ 10

РОЗГОРТКИ ПОВЕРХОНЬ

План лекції:

10.1. Розгортки багатогранників.

10.2. Побудова розгорток деяких кривих поверхонь.

10.1. Розгортки багатогранників

Розгорткою поверхні називається плоска фігура, яка утворена послідовним суміщенням усіх граней поверхні з однією площиною без утворення розривів та складок. Так як грані повністю суміщаються з площиною розгортки, то багатогранна поверхня є *розгортною*, а її розгортка – *точна*.

Всі грані багатогранника на розгортці подаються в натуральну величину. Тому побудова розгортки зводиться до побудови натуральної величини граней многогранників

Доцільно виконувати побудову розгортки призми способом „*розкатки*”. *Суть способу полягає в послідовному обертанні граней призми навколо ребер до суміщення їх з площиною розгортки.*

На рис. 10.1 показана побудови розгортки похилої призми. Для визначення натуральних величин бічних ребер, а ребра основи вже проекціюються на площину $П_1$ в натуральну величину, вибрана площина $П_4$, яка паралельна бічним ребрам призми.

Розгортку виконано розрізанням поверхні призми вздовж бічних ребер та суміщення трьох бічних граней разом з основою з площиною $П_4$.

Натуральні величини граней визначають за допомогою заміни площин проекцій. Нова площина $П_4$ розташована паралельно до горизонтальних проекцій бічних ребер призми.

Розгортку призми будуються шляхом послідовного обертання її навколо одного з ребер до суміщення з площиною $П_4$. Обертають грань $ABED$ навколо ребра A_4D_4. Сліди обертання точок B і E проходять через їх проекції B_4 і E_4 перпендикулярно до проекції осі обертання – A_4D_4. З точки A_4, як із центра, радіусом рівним стороні основи A_1B_1 проведена дуга. Перетин цієї дуги з проекцією траєкторії обертання точки B_4 визначить точку B, через яку проводять пряму паралельну A_4D_4 до перетину з проекцією траєкторії обертання точки E_4. Побудовані точки B і E визначають натуральну величину грані $ABED$.

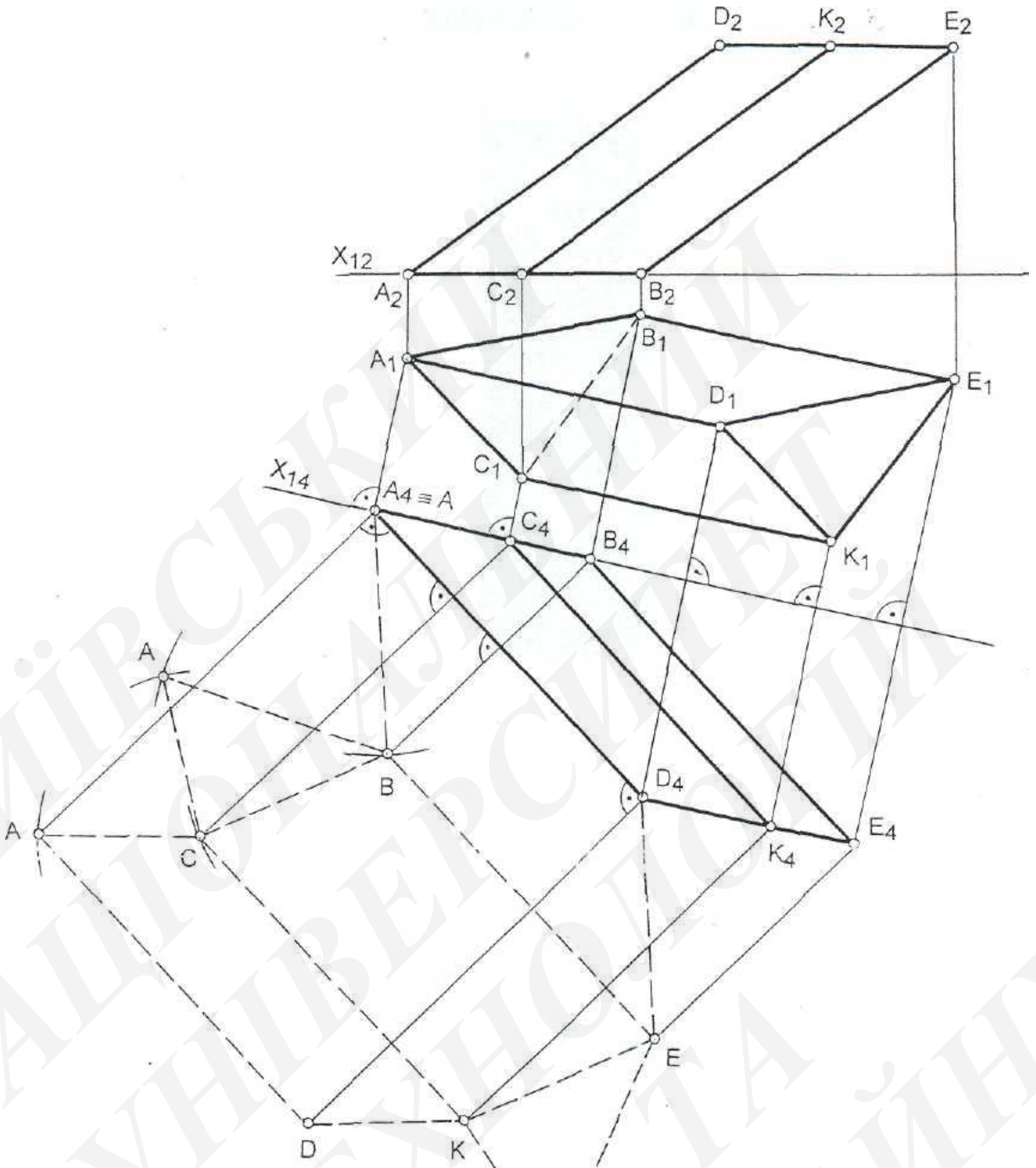


Рис. 10.1

Аналогічно будуються натуральні величини і інших граней призми. До розгортки бічної поверхні призми добудовують основи призми, які на площину $П_1$ проекціюються в натуральну величину.

При побудові розгортки призми задачу можна розв’язати поділом діагоналями кожної грані на трикутники.

Такий спосіб трудомісткий і використовується в особливих випадках. Використовується і спосіб *нормального перерізу* – перпендикулярного ребрам призми.

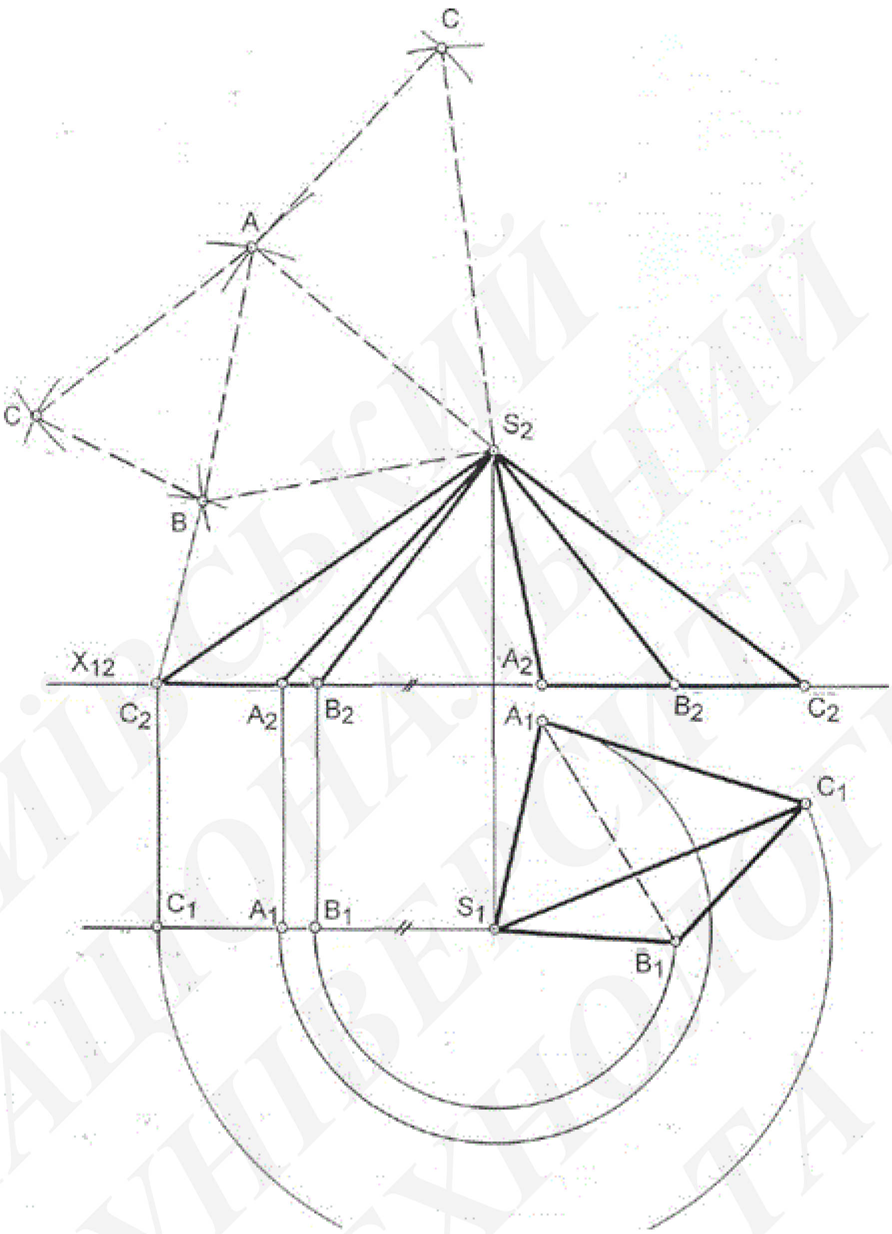


Рис. 10.2

Для побудови розгортки піраміди *методом обертання* визначають натуральні величини кожного із ребер. На рис. 10.2 для визначення натуральних величин усіх ребер піраміди виконано обертання їх навколо осі, яка проходить через вершину піраміди *S*. На фронтальній площині проекцій таким чином визначені натуральні величини бічних ребер піраміди. На ребрі *SC*, (проекції S_2C_2) побудовано трикутник *SCB* по трьом відомим сторонам; на стороні *SB* побудовано трикутник *SBA* і на стороні *SA* трикутник *SAC*. До розгортки бічної поверхні піраміди добудована основа АВС, яка рівна горизонтальній проекції $A_1B_1C_1$. В літературі розглядаються і інші способи побудови розгорток граних поверхонь.

Розгортка поверхні

10.2. Побудова розгорток деяких кривих поверхонь

Розгортка будь-якої розгортної лінійчатої поверхні *наближена*. Для побудови розгортки лінійчатої кривої поверхні останню замінюють (*апроксимують*) *вписаними* або *описаними поверхнями багатогранників*.

Розгортка поверхні циліндра. При побудові розгортки циліндричної поверхні використовують ті ж способи які застосовуються для розгортання бічної поверхні призми.

При побудові розгортки циліндричної поверхні її поверхню замінюють призматичною поверхнею, вписаною або описаною відповідно циліндричної поверхні. Всі грані многогранника на розгортці подаються в натуральну величину Це означає, що побудова розгортки поверхні циліндра зводиться до визначення натуральної величини граней вписаної призми.

На рис. 10.3 наведено приклад побудови розгортки циліндра. Основу циліндра (коло), поділяють на шість рівних частин. Це означає, що в поверхню циліндра вписана шестигранна призма.

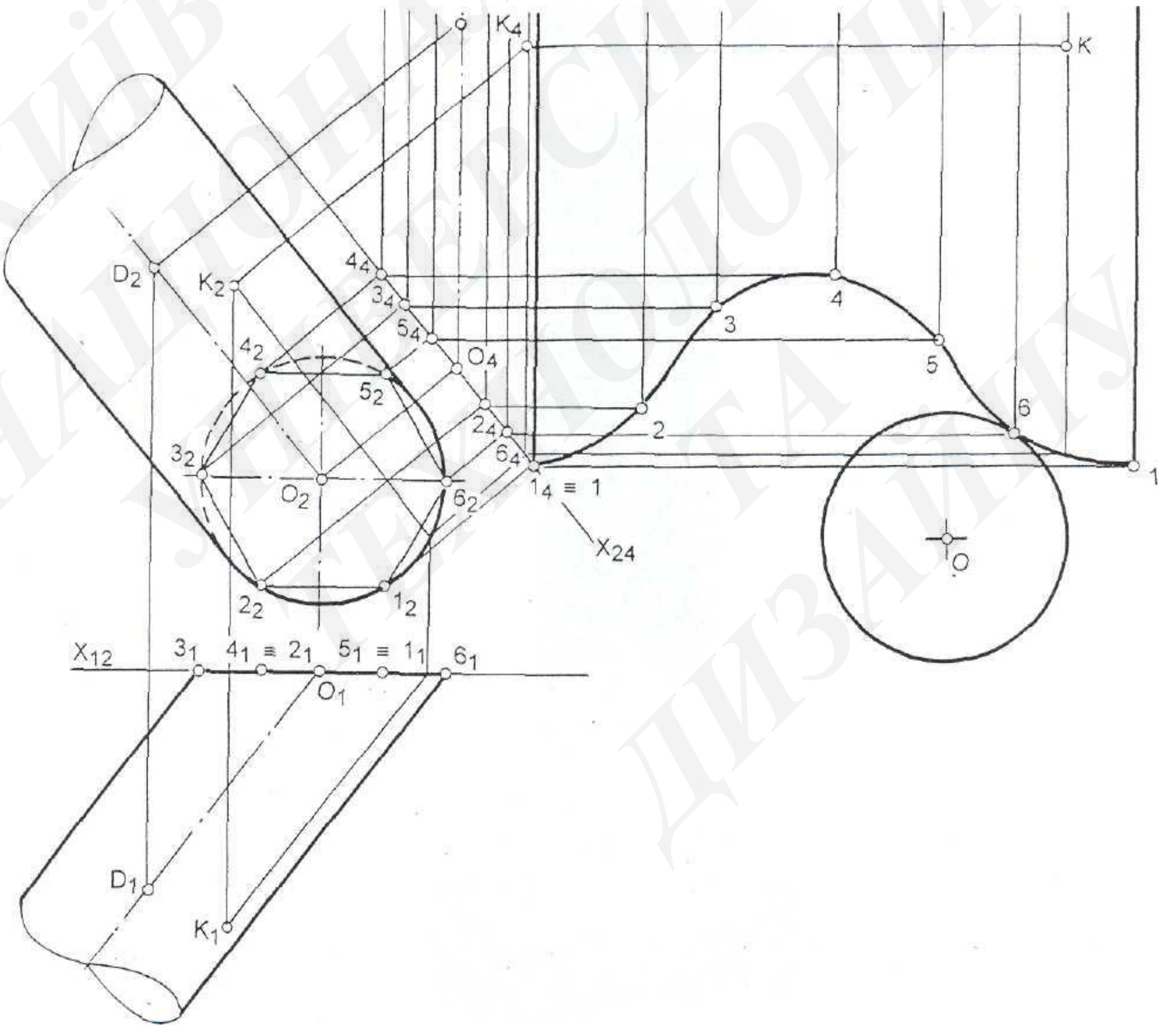


Рис. 10.3

Для визначення натуральних величин граней, визначають натуральні величини бічних ребер. Для цього використовують заміну площин проекцій. Замінюють горизонтальну площину проекцій $П_1$ на фронтально проекціювальну площину $П_4$, яка паралельна до фронтальних проекцій ребер призми.

Натуральні величини граней будують шляхом послідовного обертання їх навколо ребра до суміщення з площиною $П_4$ (див. рис. 10.1). Розгортку виконують починаючи з ребра в точці 1_4. Вершини основи призми рухатимуться по траєкторіях перпендикулярних до цього ребра.

Ребра основи описаної призми на площині $П_4$ зображуються в натуральну величину. За визначеними натуральними величинами ребер призми визначають натуральні величини граней на розгортці.

Точки основи *1, 2, 3, 4, 5, 6, 1* знаходять в перетині траєкторії руху точки основи призми з дугою радіуса рівного величині хорди кола основи. Через отримані точки на розгортці проводять бічні ребра паралельно 1_4.

Визначивши на розгортці точки основи призми послідовно сполучають плавною кривою, яка визначає розгортку основи циліндра. До розгортки бічної поверхні циліндра добудовують площину основи.

<u>Розгортка поверхні конуса.</u>

Задача на побудову розгортки конічної поверхні розв’язується так, як у випадку побудови розгортки бічної поверхні піраміди (рис. 10.2).

На рис. 10.3 розглянута побудова розгортки поверхні похилого конуса з колом в основі.

Коло основи замінюють вписаним багатокутником зі сторонами $1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1$, а конічну поверхню відповідно поверхню піраміди з трикутними гранями $S_1 1_1 2_1, S_1 2_1 3_1, \ldots S_1 6_1 1_1$. В представленому вигляді поверхня подається сукупністю цих трикутників.

Способом обертання навколо осі, яка проходить через вершину конуса *S*, визначають натуральні величини ребер піраміди на фронтальній площині проекцій – $S_2\bar{1}_2, S_2\bar{2}_2, \ldots S_2\bar{6}_2$.

Для побудови розгортки конуса вибирають довільну точку *S*, на основі якої будують трикутник за трьома його сторонами $S_2\bar{1}_2$, $S_2\bar{2}_2$ та $1_1 2_1$, де останній відрізок сторона вписаного в коло основи багатокутник (хорда). Потім послідовно добудовують решту трикутних граней піраміди. Визначені точки *1, 2,* 3,*...6, 1* сполучають плавною кривою і отримують розгортку бічної поверхні конуса.

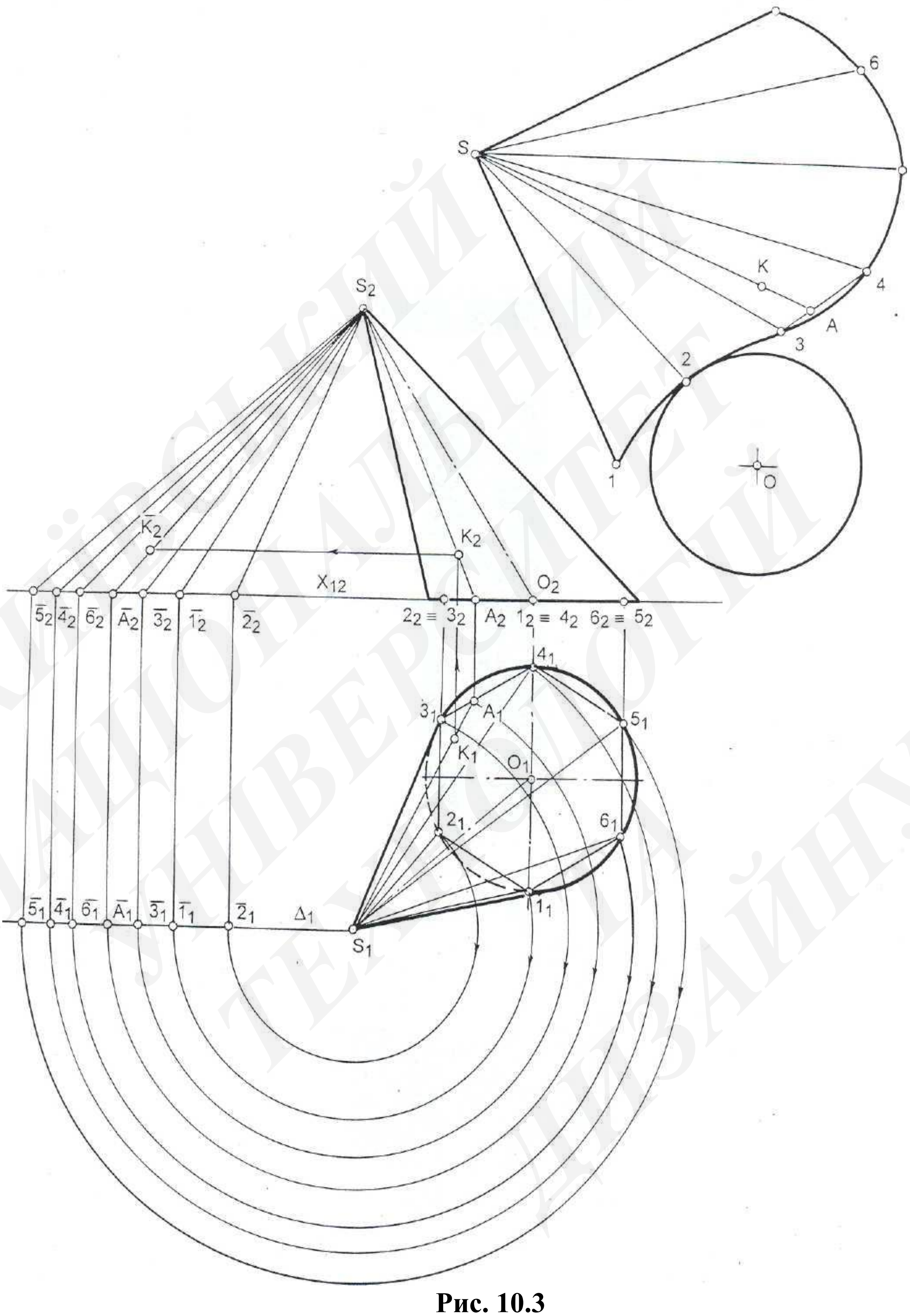


Рис. 10.3

Для отримання повної розгортки поверхні конуса, необхідно приєднати до розгортки бічної поверхні основу піраміди – коло.

Якщо на розгортці треба знайти точку, яка задана на поверхні, наприклад точка K (K_1, K_2), то через цю точку проводять твірну SA, знаходять її положення на розгортці (SA) і відкладають на SA відрізок $S_2\overline{K}_2$ який дорівнює натуральній величині відрізка SK.

Для більш точної розгортки циліндричної або конічної поверхні вписують поверхню з більшою кількістю граней.

Розглянемо побудову розгортки конусу з недосяжною вершиною. Задано фронтальну проекцію прямого кругового конуса з колом діаметром D в нижній основі (рис. 10.4). Дійсна величина твірної дорівнює l. Будуємо допоміжний конус з вершиною $T(T_2)$, подібний заданому з недосяжною вершиною. Діаметр d основи допоміжного конуса вибираємо кратним діаметру D, тобто так, щоб відношення діаметрів було цілим числом, а саме: $k = \frac{D}{d}$. Далі будуємо розгортку допоміжного конусу і одержуємо дугу сектору $A_0, B_0, C_0 \ldots$ З довільної точки S_0 будуємо промені через побудовані точки A_0, B_0, $C_0 \ldots$ На променях позначаємо відповідні точки A_0', B_0', C_0' з урахуванням коефіцієнту k.

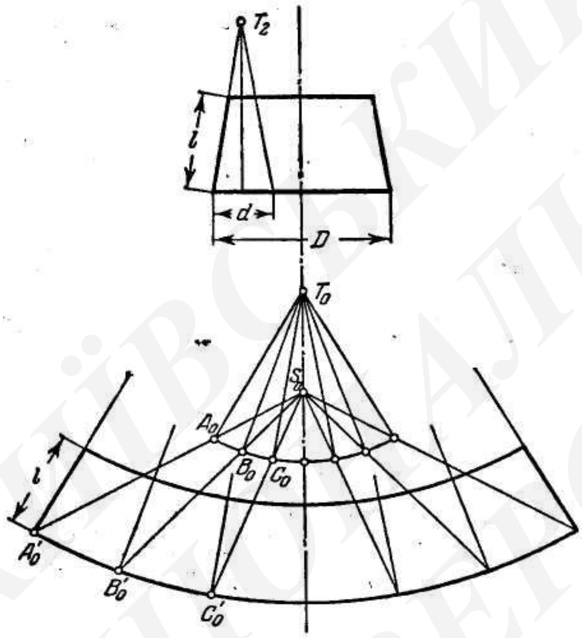


Рис. 10.4

Тобто будуємо дугу A_0', B_0', $C_0' \ldots$ подібну до дуги A_0, B_0, $C_0 \ldots$ з коефіцієнтом подоби k. Це і буде розгортка нижньої основи. Через точки A_0', B_0', $C_0' \ldots$ проводимо прямі, які паралельні відповідним твірним на розгортці допоміжного конусу, які проходять через відповідні точки. На цих прямих відмічаємо довжину твірної і одержуємо точки, які визначають розгортку верхньої основи. Побудова закінчується викреслюванням кривих ліній двох основ конуса.

Для побудови розгортки похилого еліптичного циліндра вписуємо у нього n–грану призму. Спочатку його основу поділяємо на 8-12 рівних частин. Далі виконуємо графічні операції, що й при побудові розгортки призми. Точки розгорток основи з'єднуємо плавною лекальною кривою лінією.

Умовна розгортка поверхні обертання. Для побудови умовних розгорток нерозгортних поверхонь обертання за а*проксимуючі поверхні* приймають *циліндри* або *конуси*.

На рис. 10.5 показана апроксимація поверхні обертання, заданої обрисами. Поверхню обертання поділено на вісім *меридіанних перерізів*. Задана поверхні обмежується циліндричними поверхнями, для яких напрямними лініями будуть меридіанні перерізи поверхні обертання, а твірні – перпендикулярні до площин середніх меридіанних перерізів.

Для побудови розгортки будують на поверхні обертання ряд її паралелей і відмічають точки їх перетину напрямними лініями циліндрів.

Відрізок проекцій екватора, обмежений меридіанними площинами Σ_1 та Δ_1, заміняють відрізком прямої B_1C_1 дотичним в точці A_1 до проекції екватора. На горизонтальній прямій лінії m відкладають відрізки рівні відрізку B_1C_1, а через середини цих відрізків проводять прямі лінії, перпендикулярні до прямої m. На цих лініях відкладають спрямлені меридіанні перерізи, на яких відмічають точки їх перетину паралелями. Через відмічені точки проводять горизонтальні прямі лінії. На них відкладають в обидві сторони відрізки, рівні відповідно половині довжин дотичних до паралелей, обмежених площинами напрямних ліній циліндрів. Ці відрізки отримують шляхом побудови дотичних до горизонтальних проекцій відповідних паралелей поверхні обертання.

Сполучають крайні точки побудованих відрізків плавними кривими лініями і отримують обрис однієї ланки розгортки заданої поверхні. Повна розгортка поверхні складається з восьми таких ланок.

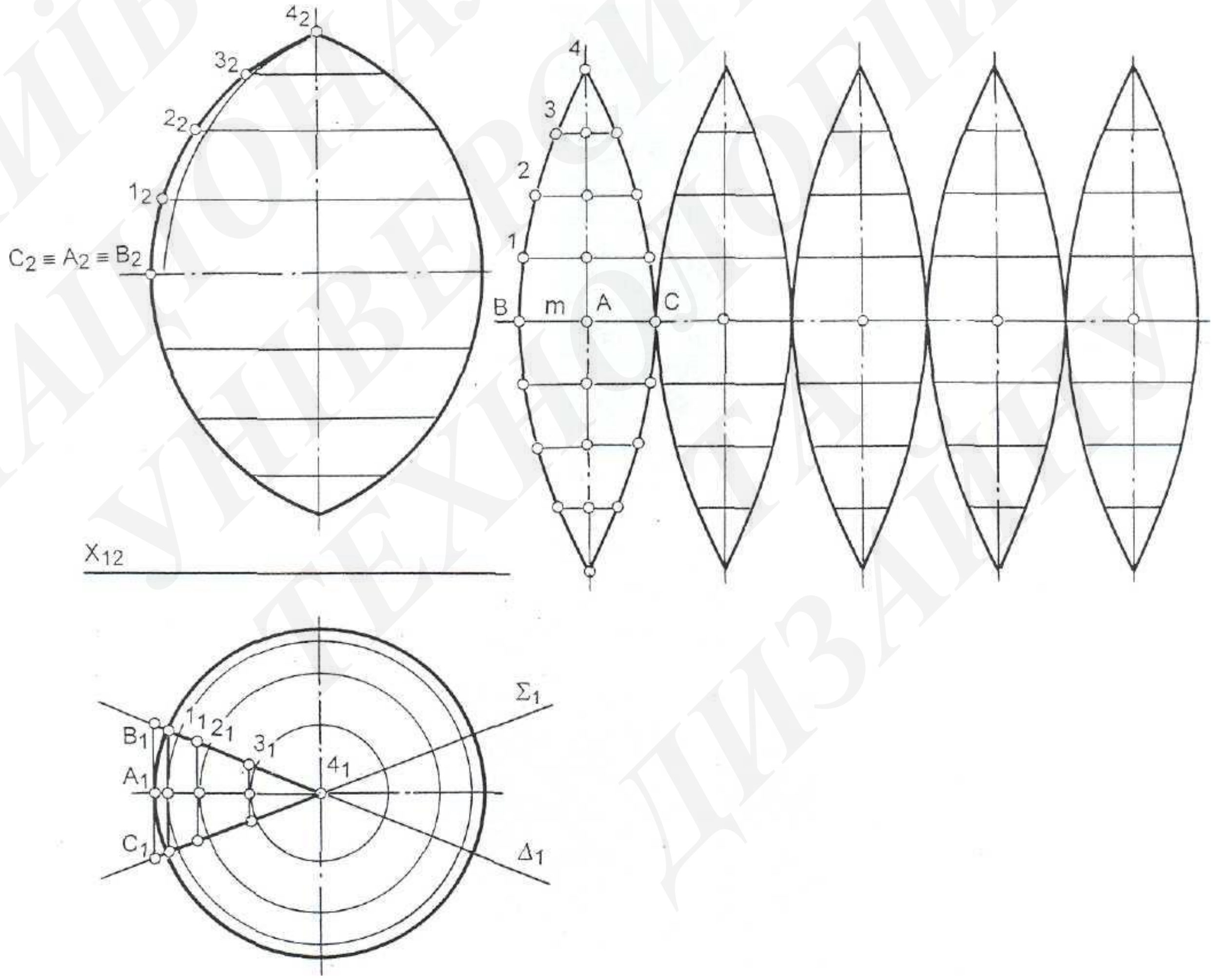
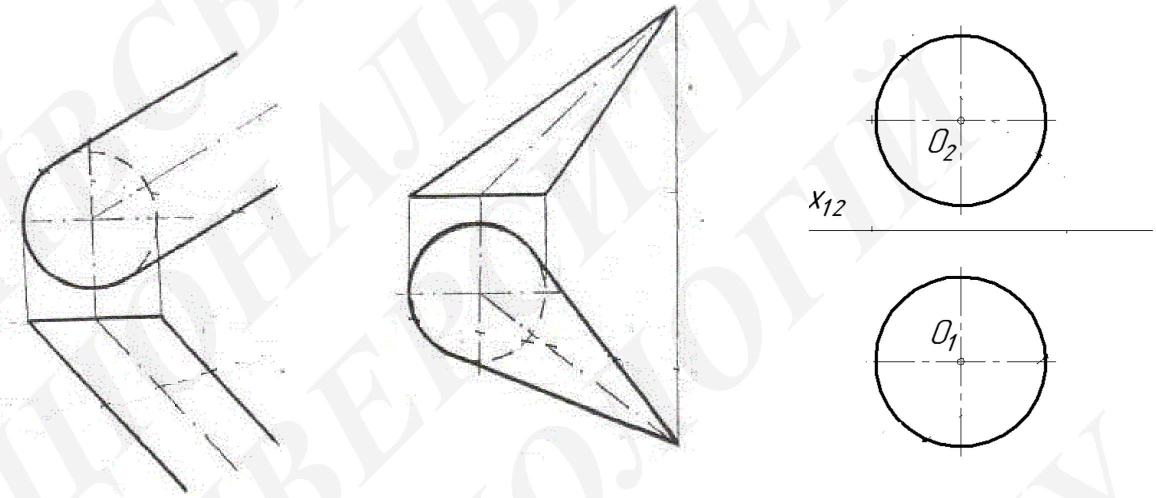


Рис. 10.5

При апроксимації поверхні обертання іншим прийомом, рахують, що *каркас поверхні складається з її паралелей*, а поверхня обмежується поверхнями зрізаних конусів, які опираються на ці паралелі. Тут задача зводиться до побудови ряду розгорток конічних поверхонь і однієї розгортки циліндричної поверхні(середній пояс).

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. Побудувати розгортку призми.
2. Побудувати розгортку піраміди
3. Вкажіть заходи, які використовують при побудові розгорток циліндричних та конічних поверхонь.
4. В чому полягає спосіб апроксимації?
5. Як побудувати умовну розгортку сферичної поверхні?
6. Побудуйте розгортку вказаних поверхонь.



Література по темі лекції:

[9] – с. 50-52, 80-84.

ЧАСТИНА ІІ. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

ЛЕКЦІЯ 11

ПОБУДОВА АКСОНОМЕТРИЧНИХ ПРОЕКЦІЙ

<u>План лекції</u>:
11.1. Загальні положення.
11.2 Прямокутні аксонометричні проекції.
11.2.1 Прямокутна ізометрична проекція.
11.2.2 Прямокутна диметрична проекція.
11.3 Косокутні аксонометричні проекції.
11.3.1 Косокутна фронтальна ізометрична проекція.
11.3.2 Косокутна горизонтальна ізометрична проекція.
11.3.3 Косокутна фронтальна диметрична проекція.

11.1. Загальні положення

В практиці проектування технічних форм виникає необхідність більш наочного, ніж на комплексному кресленику, зображення предмета для його просторового сприйняття. Це досягається за допомогою *аксонометричних проекцій* або *аксонометрії*.

Аксонометричними проекціями називають зображення, яке отримане в результаті проекціювання паралельними променями предмета разом з висями прямокутних координат, до яких цей предмет віднесений у просторі на одну площину проекцій. Отже, аксонометрична проекція є, перш за все, проекція тільки на одній площині, а не на двох або більше, як це має місце в системі ортогональних проекцій (рис. 11.1).

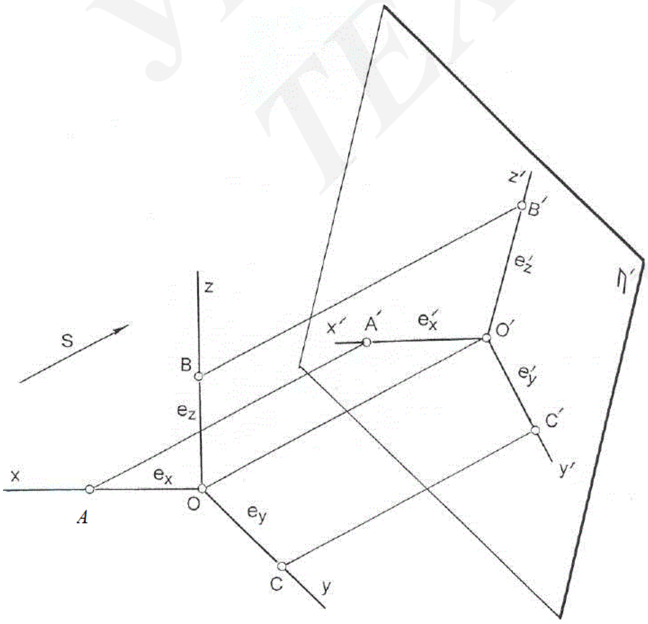


Рис. 18.1

Напрям аксонометричного проекціювання вибирають так, щоб проекціювальні промені не були паралельні ні до однієї із площин, утворених висями координат. Тому на аксонометричному зображенні предмета видні всі три головні виміри: *висота*, яка вимірюється вздовж осі *z*, *ширина*, яка вимірюється вздовж осі *y*, і *довжина*, яка вимірюється вздовж осі *x*.

Відрізки, які паралельні координатним осям, проекціюються на площину аксонометричних проекцій, в загальному випадку, спотвореними.

Показником спотворення називають відношення довжини відрізка на аксонометричній осі до довжини такого ж відрізка на відповідній осі прямокутної системи координат в просторі.

Прийнято показники спотворення по осі x позначати літерою p, по осі y – літерою q, а по осі z – літерою r.

Тоді (див. рис. 11.1):

$$p = \frac{e'x}{ex};\ q = \frac{e'y}{ey};\ r = \frac{e'z}{ez};$$

Показники спотворення можуть бути менше, більше або дорівнювати одиниці. Їх величини залежать від взаємного положення осей координат і площини аксонометричних проекцій, а також від вибраного напряму проекціювання.

Аксонометричні проекції називають ізометричними, або ізометрією, якщо показники спотворення по всім осям рівні, тобто $p = q = r$.

Якщо показники спотворення рівні тільки по двом осям – $p = q \neq r$ *або* $p = r \neq q$, *або* $q = r \neq p$, *то проекції називають диметричними або диметрією.*

Ізометрія і диметрія можуть бути *прямокутними* або *косокутними*.

В технічному кресленні використовують наступні види аксонометричних проекцій:

а) прямокутну ізометричну;
б) прямокутну диметричну;
в) косокутну (фронтальну) диметричну;
г) косокутну (фронтальну) ізометричну;
д) косокутну (горизонтальну) ізометричну;

11.2. Прямокутні аксонометричні проекції
11.2.1. Прямокутна ізометрична проекція

В прямокутних ізометричних проекціях коефіцієнти спотворення по осям одинакові

$$p = q = r$$

В цій проекції площина аксонометричних проекцій однаково нахилена до координатних осей, тобто площина відсікає на всіх трьох осях одинакові відрізки $Ox = Oy = Oz$. В цьому випадку трикутник слідів рівносторонній (рис. 11.2).

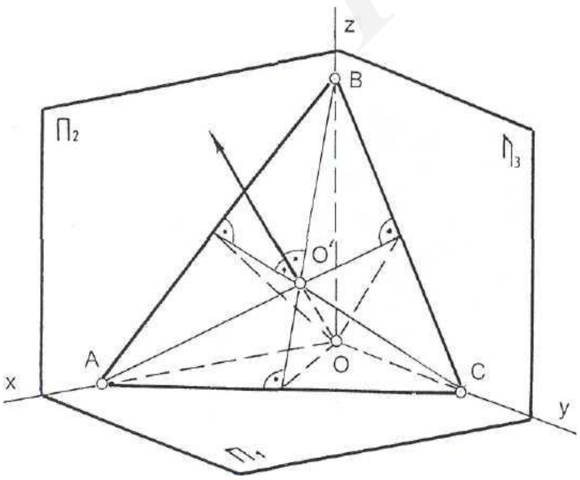


Рис. 11.2

В ізометрії вісь $O'z'$ розміщена вертикально, а осі $O'x'$ та $O'y'$ утворюють з віссю $O'z'$ кути по $120°$. Коефіцієнт спотворення по осям x', y', z' дорівнює 0,82. Для спрощення побудови ізометричної проекції рекомендується не користуватись коефіцієнтом спотворення, який дорівнює $0,82$, а замінити його на одиницю. В цьому випадку отримують зображення збільшене в $1,22$ рази.

На рис. 11.3 показана побудова ізометричної проекції A' точки A, заданої в ортогональних проекціях.

На рис. 11.4 виконана побудова ізометричної проекції куба з колами, вписаними в його грані.

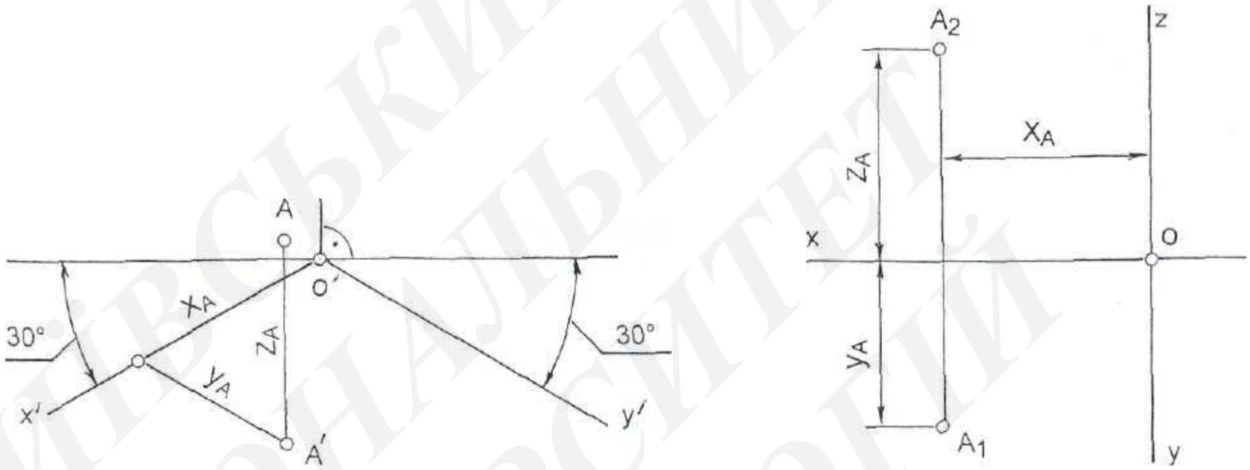


Рис. 11.3

Аксонометричні осі $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ збігаються з напрямами ребер куба. В цьому випадку грані куба зобразяться *ромбами*, а кола – *еліпсами*.

Центри квадратів (кіл) в ізометрії будують центрами ромбів (еліпсів).

Осі еліпсів збігаються з діагоналями ромбів. Малі осі еліпсів збігаються з напрямом аксонометричних висей, великі – перпендикулярні до них.

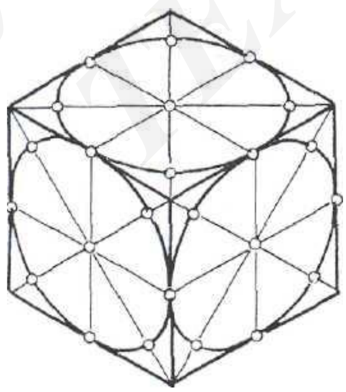


Рис. 11.4

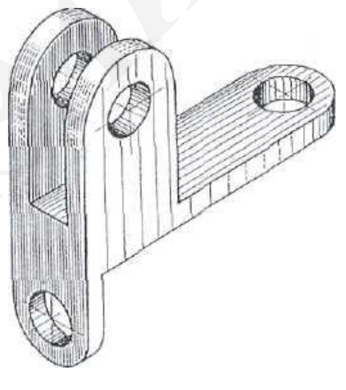


Рис. 11.5

Ізометричні проекції використовують в тих випадках, коли необхідно показати елементи предмета з трьох сторін, які однаково важливі. На рис. 11.5 представлене зображення деталі в ізометрії.

11.2.2. Прямокутна диметрична проекція

В прямокутних диметричних проекціях коефіцієнти спотворення однакові по двох висях

$$p = r \neq q$$

В цьому випадку площина аксонометричних проекцій однаково нахилена до двох координатних осей. В цьому випадку трикутник слідів рівнобедрений. (рис. 11.6).

В прямокутній диметрії прийнято вісь $O'z'$ розміщувати вертикально: вісь $O'x'$ утворює з горизонтальною лінією кут $7°10'$, а вісь $O'y'$ – кут $41°25'$.

При побудові аксонометричних осей $O'x'$ та $O'y'$ в диметрії можна не вимірювати кути, а скористатися співвідношеннями катетів прямокутних трикутників і гіпотенузи. Так

$$tg7°10' = 0{,}1257 \approx 1:8$$
$$tg41°25' = 0{,}8821 \approx 7:8$$

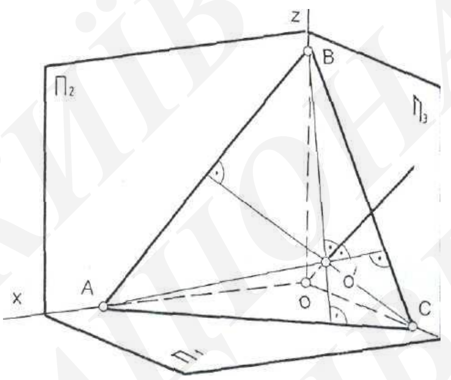


Рис. 11.6

При побудові точної диметричної прямокутної проекції координати довільної точки простору помножують на відповідний коефіцієнт спотворення: по напряму $O'x'$, $O'z'$ на 0,94, а по осі $O'y'$ – на *0,47*.

В практиці користуються наведеним коефіцієнтами спотворення, рівними *1* та *0,5*. Отримані зображення декілька збільшені. Всі елементи зображення збільшені у $1:0{,}94 \approx 1{,}05$ рази.

На рис. 11.7 побудована диметрична проекція A' точки A, заданої координатами в фронтальній проекції. На рис. 11.8 побудована диметрична проекція куба з вписаними в його грані колами.

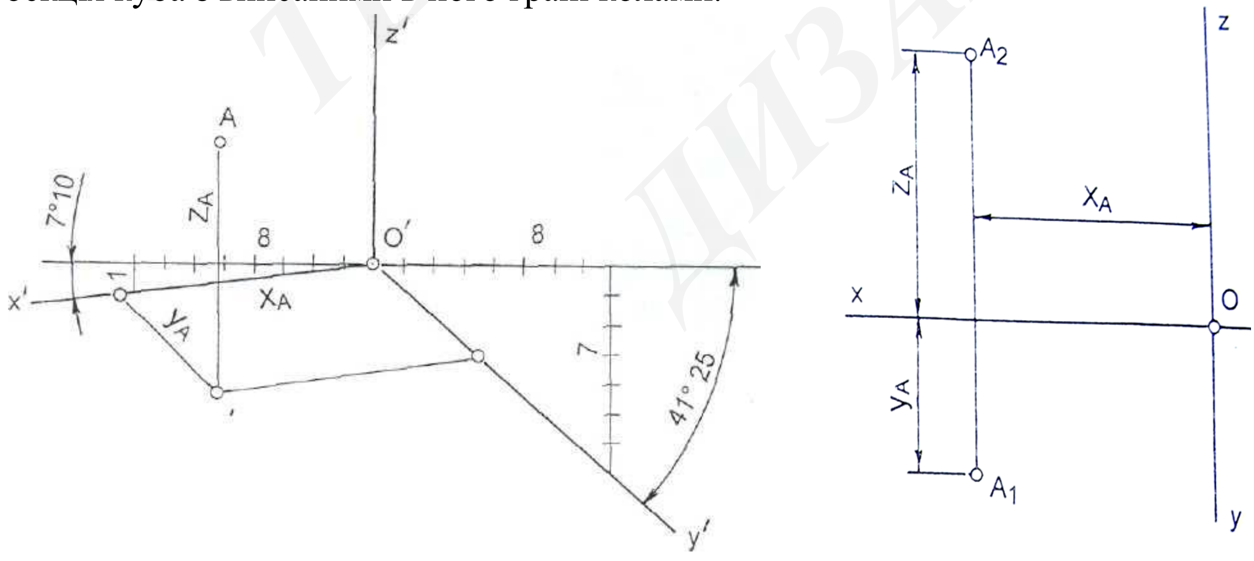


Рис. 11.7

Центри кіл і точки дотику їх з квадратами в серединах сторін в диметричних проекціях будуть також центрами еліпсів і точками дотику еліпсів з ромбами і паралелограмами в серединах їх сторін. Діаметри кіл, які паралельні осям, будуть спряженими діаметрами еліпсів.

Коефіцієнт спотворення по висях x' та z' дорівнює *0,94*, а по осі y' – *0,47*.

Для спрощення побудови рекомендується диметричну проекцію виконувати без спотворення по осях x' та z' (тобто коефіцієнт спотворення *1*), а по осі y', застосовують коефіцієнт спотворення *0,5*.

На рис. 11.9 представлено зображення деталі в прямокутній диметрії.

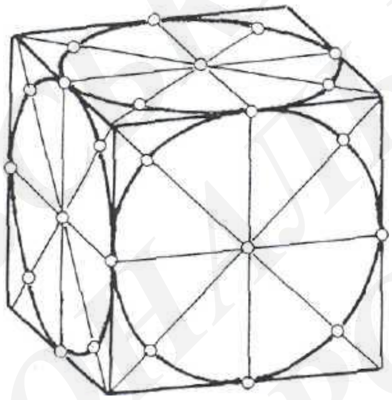


Рис. 11.8

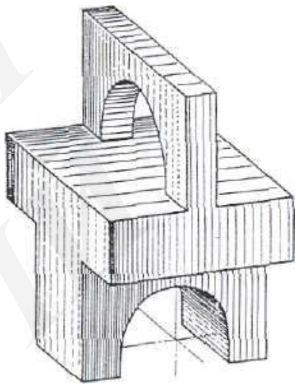


Рис. 11.9

11.3 Косокутні аксонометричні проекції

Розглянемо косокутні аксонометричні проекції на площини, яка паралельна площинам проекцій. В цих випадках дві аксонометричні осі і всі прямі, паралельні до них, а також кути цієї площини, проекціюються без спотворення.

Косокутні проекції доцільно використовувати в тих випадках, коли криволінійні обриси фігури (поверхні) розміщені в фронтальній або горизонтальній площинах. Вони проекціюються на площину Π' аксонометричних проекцій без спотворення – в *натуральну величину*.

11.3.1 Косокутна фронтальна ізометрична проекція

Положення аксонометричних осей показано на рис. 11.10. Вісь z' – вертикальна. Кут нахилу осі y' становить $45°$ до горизонталі, але допускається застосовувати фронтальну ізометричну проекцію з кутами нахилу осі y' – $30°$ або $60°$.

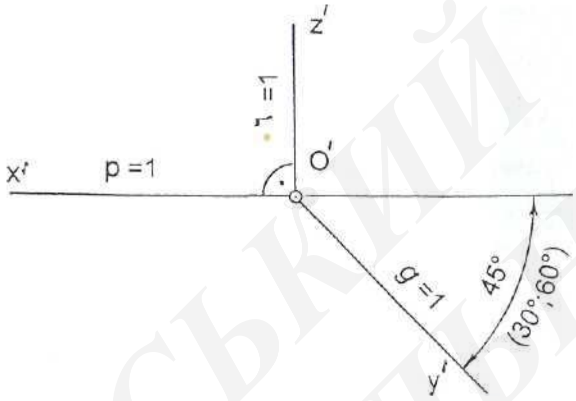


Рис. 11.10

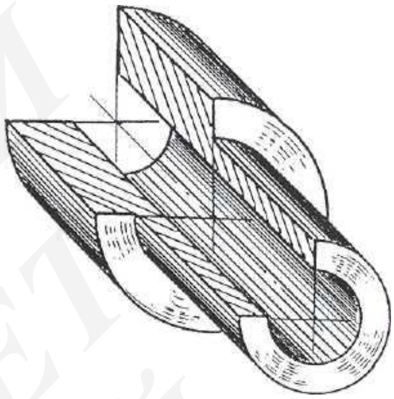


Рис. 11.11

Фронтальна ізометрична проекція виконується без спотворення по осях x', y', z', тобто $p = q= r= 1$.

Кола, які розташовані в фронтальних площинах, проекціюються на аксонометричну площину проекцій колами (рис. 11.11).

11.3.2 Косокутна горизонтальна ізометрична проекція

Положення аксонометричних осей показано на рис. 11.12. Як звичайно вісь z' – вертикальна. Вісь y' проводять під кутом $30°$, але допускається проводити вісь y' під кутом $45°$ або $60°$. Кут між висями x' та y' у всіх випадках повинен дорівнювати $90°$.

Горизонтальну ізометричну проекцію виконують без спотворення на усіх трьох осях x', y', z': $p = q = r = 1$.

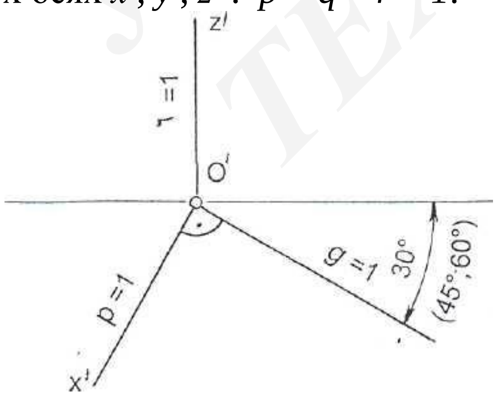


Рис. 11.12

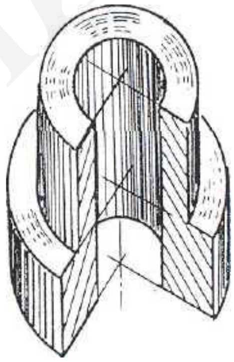


Рис. 11.13

Кола розташовані в горизонтальних площинах рівня, проекціюються на аксонометричну площину проекцій колами (рис. 11.13).

11.3.3 Косокутна фронтальна диметрична проекція

Положення аксонометричних осей диметричної фронтальної проекції показано на рис. 11.14. Вісь z' – вертикальна. Кут нахилу осі y' дорівнює $45°$, але допускається застосування і кутів нахилу осі y' і $30°$, і $60°$.

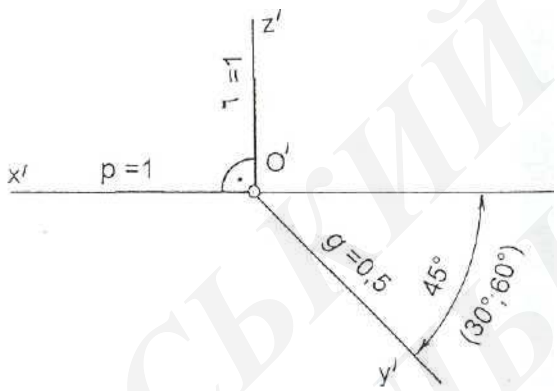


Рис. 11.14

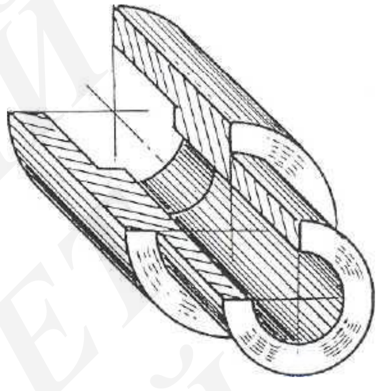


Рис. 11.15

Коефіцієнт спотворення по висях x' та z' дорівнює 1, а на осі y' – $0,5$. Кола розташовані в фронтальних площинах рівня, проекціюються на аксонометричну площину проекцій *колами* (рис. 11.15).

Лінії штрихування перерізів в аксонометричних проекціях наносять паралельно одній із діагоналей проекцій квадратів, які лежать у відповідних координатних площинах. На рис. 11.16 показано нанесення ліній штрихування: рис. 11.16, *а* – прямокутна ізометрична проекція; рис. 11.16, *б* – косокутна фронтальна ізометрична проекція; рис. 11.16, *в* – косокутна горизонтальна ізометрична проекція; рис. 11.16, *г* – прямокутна диметрична проекція; рис. 11.16, *д* – косокутна фронтальна диметрична проекція.

Аксонометричні проекції [14]

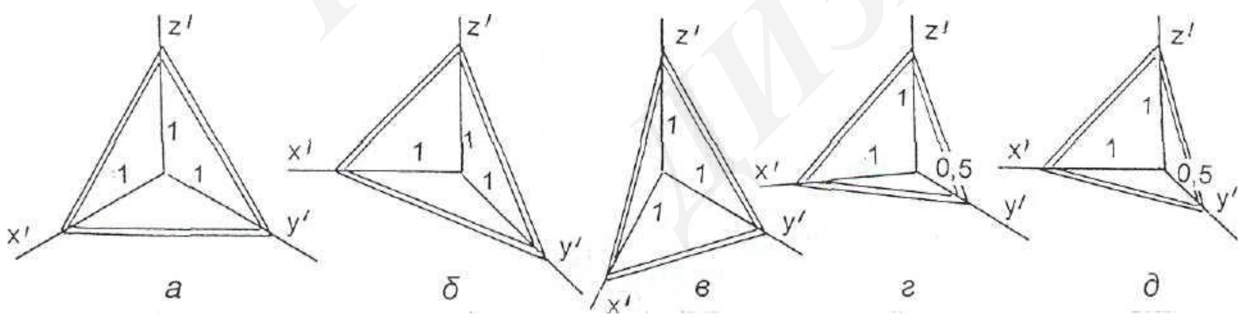
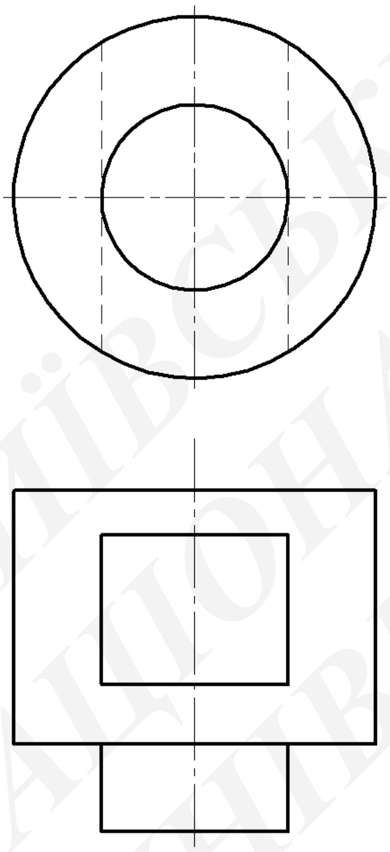


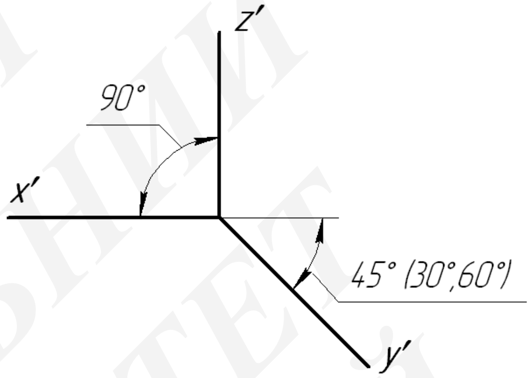
Рис. 11.16

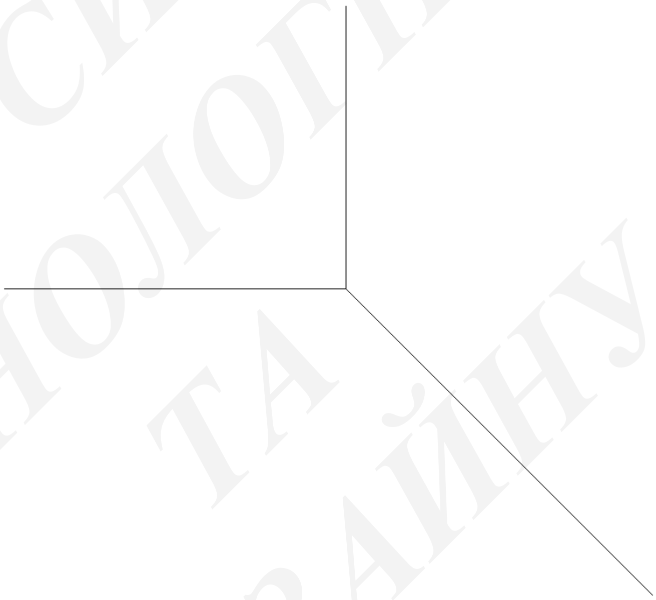
Запитання та завдання для самоконтролю:

1. Чи можуть у прямокутній аксонометрії дві або одна вісь зображуватися не спотворено?

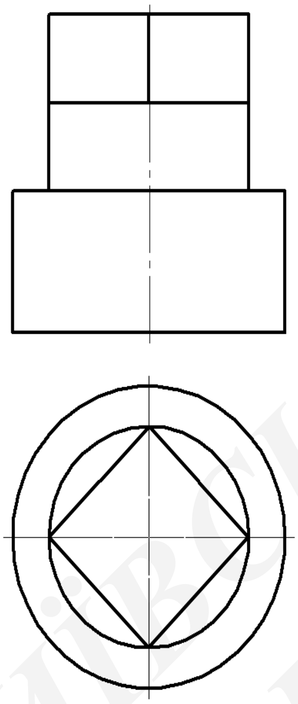
2. Побудувати фронтальну ізометрію заданої фігури.

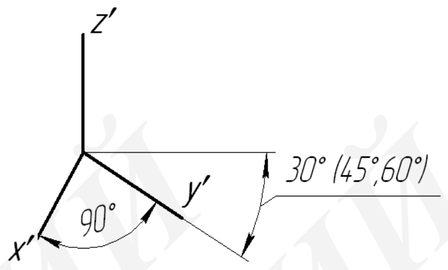


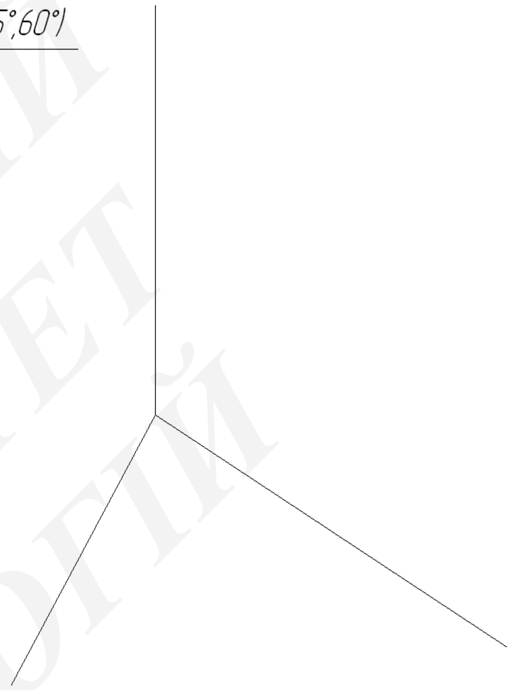




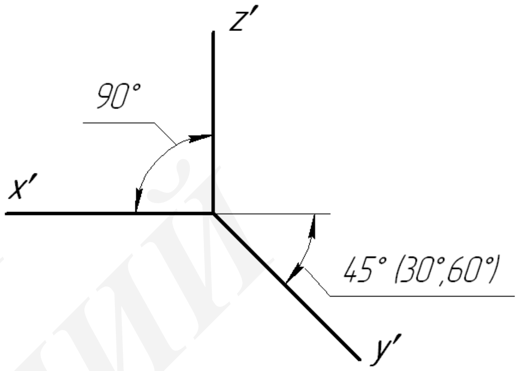
3. Побудувати горизонтальну ізометрію заданої фігури.

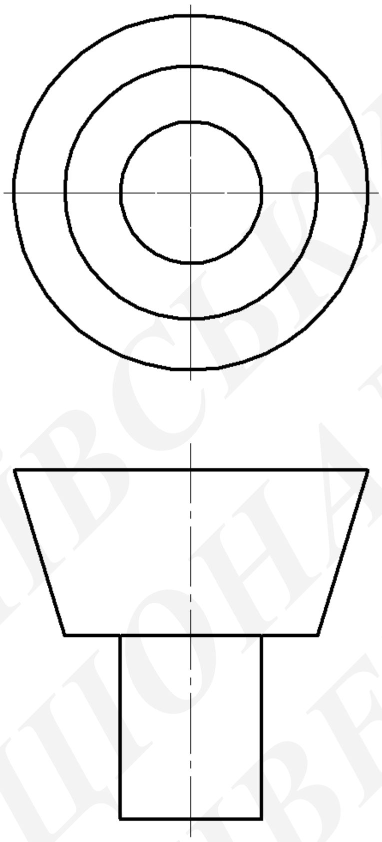


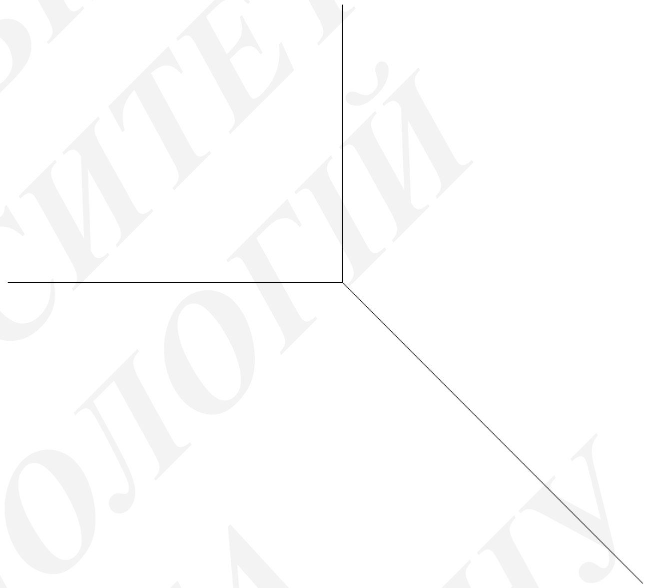




4. Побудувати фронтальну диметрію заданої фігури.







Література по темі лекції:
[9] – с. 100-106.

ЛЕКЦІЯ 12

ДОПОМІЖНЕ КОСОКУТНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

(додаткова тема для самостійної роботи)

<u>План лекції</u>:

12.1. Косокутна проекція точки.

12.2. Перетворення прямої загального положення в проекціювальну.

12.3. Перетворення площини загального положення в проекціювальне.

12.4. Перетин прямої з площиною.

12.5. Перетин двох площин.

12.6. Косокутні проекції лінійчатих поверхонь

Серед способів перетворення проекцій при розв’язанні позиційних задач віддається перевага допоміжному косокутному проекціюванню. *При цьому способі, геометричний образ, не змінюючи свого положення, проекціюється косокутно на основні площини проекцій Π_1 та Π_2 або на додаткові площини.*

Напрям проекціювання вибирається в залежності потреб перетворення рисунка. Найчастіше виникає необхідність в допоміжних проекціювальних положеннях прямої, площини, лінійчатої поверхні.

12.1. Косокутна проекція точки

Допоміжною проекцією точки *A* (рис. 12.1) на горизонтальну площину проекційΠ_1, при заданому напрямі проекціювання *S*, буде точка A_1. Це слід прямої, яка проходить через точку *A*, паралельно заданому напряму проекціювання.

На рис. 12.2 показано побудову допоміжної косокутної проекції точки *B* на фронтальну площину проекцій Π_2.

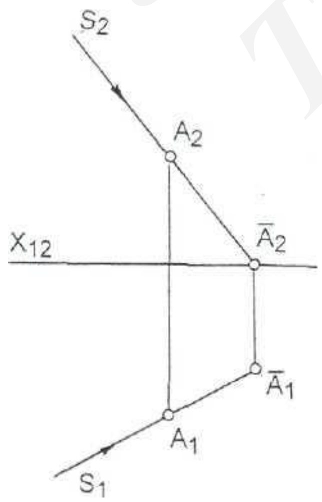


Рис. 12.1

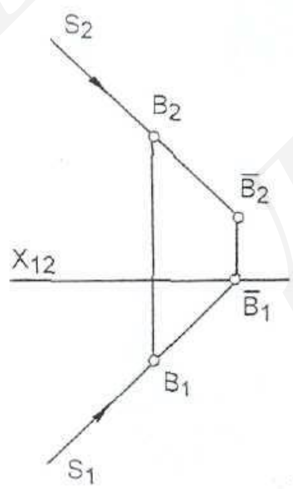


Рис. 12.2

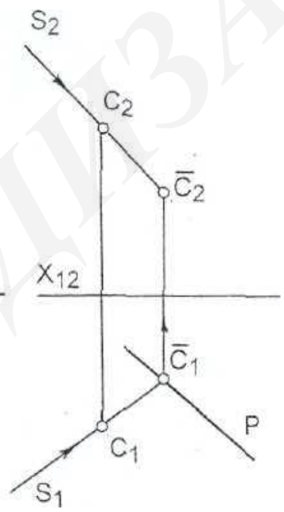


Рис. 12.3

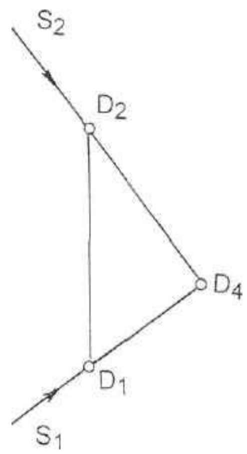


Рис. 12.4

На рис. 12.3 наведено приклад використання допоміжної площини *P*, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій $П_1$ та розташована під кутом до фронтальної площини проекцій $П_2$. Допоміжна площина використовується для зміни напрямку проекціювання.

Як слід прямої, яка проходить через точку *D* (рис. 12.4) на площині відповідності, побудована проекція точки *D* в заданому напрямку проекціювання.

12.2. Перетворення прямої загального положення в проекціювальну

Для розв’язання даної задачі, напрям проекціювання вибирається паралельно до прямої. Так як відрізок *AB* (рис. 12.5) паралельний напрямку проекціювання, то його проекція на площину проекцій $П_1$ є слідом прямої ($\overline{A}_1 \equiv \overline{B}_1$) тобто пряма буде проекціювальною.

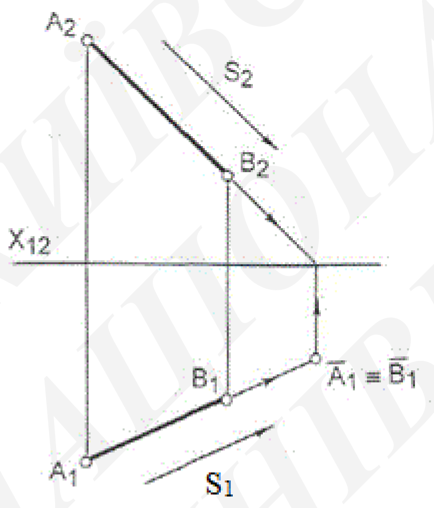


Рис. 12.5

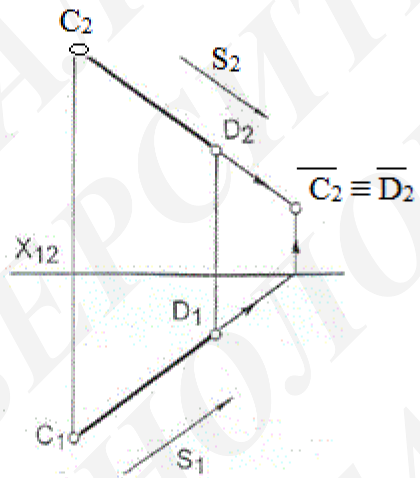


Рис. 12.6

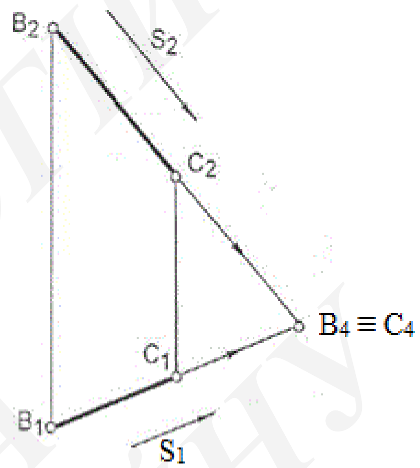


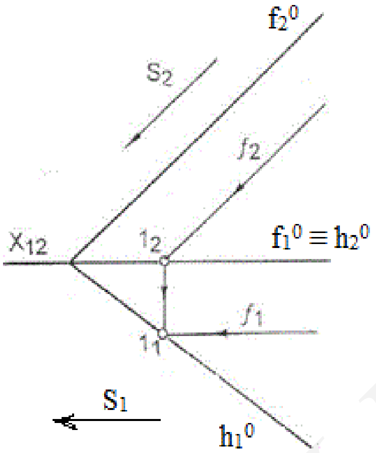
Рис. 12.7

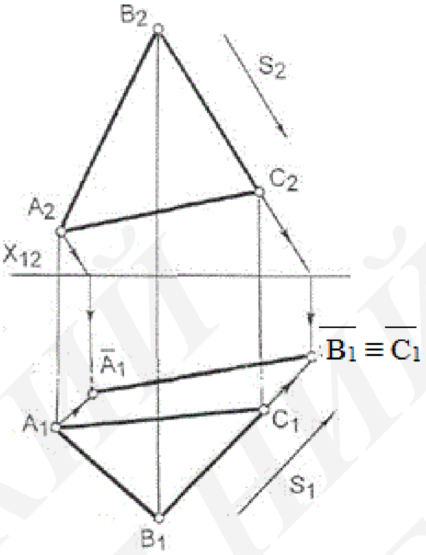
На рис. 12.6 та 12.7 побудовані косокутні проекції прямих на: пряму *CD* – на фронтальну площину проекцій $П_2$, а пряму *BC* – на парну бісекторну площину.

12.3. Перетворення площини загального положення в проекціювальне

Площина займе проекціювальне положення, якщо одна з прямих що, належить цій площині, буде займати проекціювальне положення – проекціюватися в точку.

Для цього необхідно вибрати напрям проекціювання паралельно до будь-якої прямої, яка належить площині, або напрям однієї із прямих цієї площини. Так як одна із прямих площини (по аналогії з рис. 12.5 - 12.7) проекціюється в точку, то площина буде проекціювальною і проекціюється в пряму лінію.





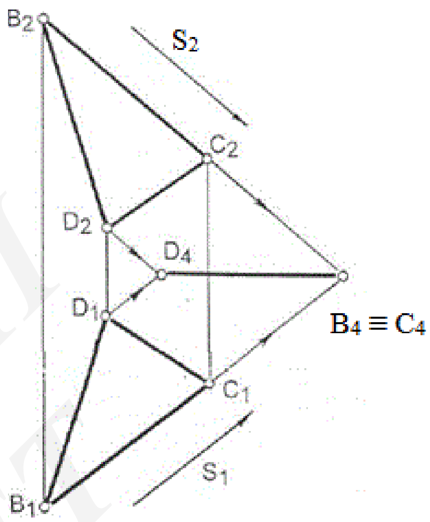


Рис. 12.8 **Рис. 12.9** **Рис. 12.10**

На рис. 12.8 пряма *BC* проекціюється в точку $\overline{B}_1 \equiv \overline{C}_1$ на горизонтальну площину проекцій $П_1$, а площина ΔABC – в пряму $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$.

На рис. 12.9 площина *BCD* в напрямі прямої *BC* проекціюється на бісекторну площину в пряму D_4-$B_4 \equiv C_4$.

Допоміжна проекція площини співпадає з її слідом, якщо за напрям проекціювання вибрати напрям паралельний фронталі або горизонталі площини. Тому, в деяких випадках напрямок допоміжного проекціювання доцільно вибирати паралельно одній із головних ліній площини – фронталі чи горизонталі. На рис. 12.10 напрям проекціювання вибрано паралельно до фронталі площини *f*, а саме паралельно f_2 (або f_2^0). На площину проекцій $П_2$, задана площина проекціюється в горизонтальний слід h_1^0.

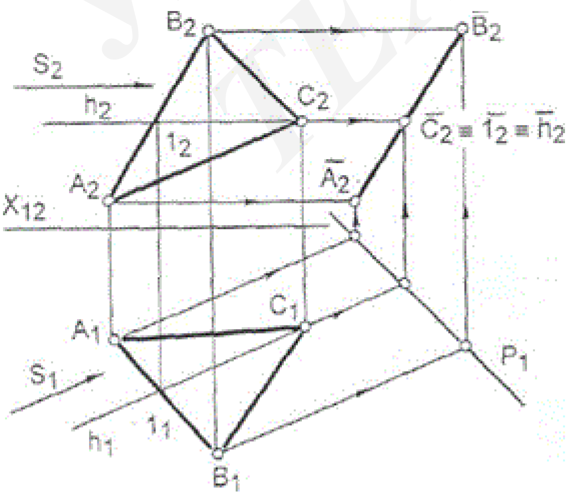


Рис. 12.11

На рис. 12.11 використана горизонтально проекціювальна площина *P* для зміни напрямку проекціювання та побудови нової проекції площини. Для побудови нової проекції площини в проекціювальному положенні використана допоміжна площина *P,* яка перпендикулярна до площини проекцій $П_1$ (див. рис. 12.11).

12.4. Перетин прямої з площиною

При виконанні задачі на побудову точки перетину прямої з площиною необхідно керуватися правилом: *якщо площина займає проекціювальне положення, вона проекціюється в пряму лінію, то на цю ж пряму проекціюється і точка перетину площини з прямою* (див. рис. 4.16).

На рис. 12.12 наведено наочне зображення перетину прямої *DE* з площиною *ABC* з використанням косокутного проекціювання. Напрям проекціювання вибраний паралельно до прямої *AB* (*S*//*AB*).

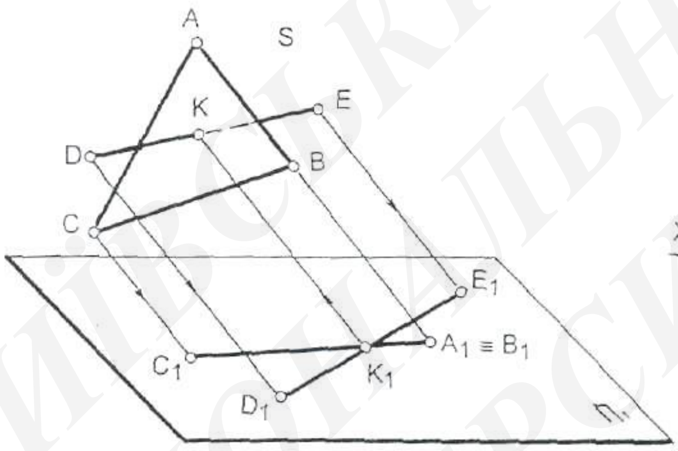


Рис. 12.12

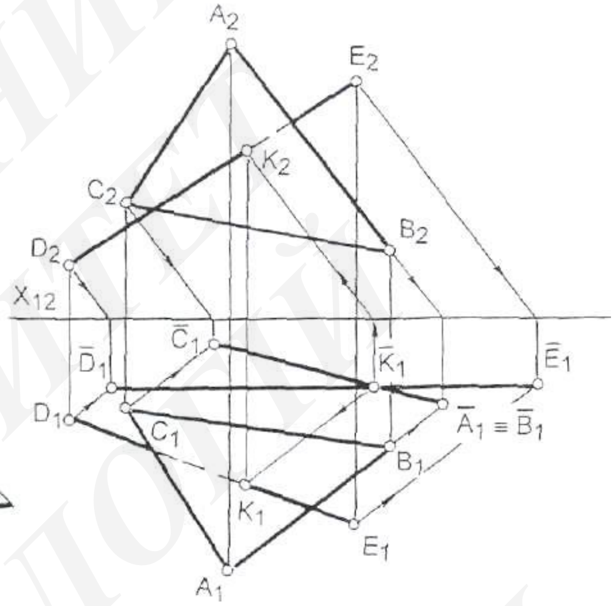


Рис. 12.13

На площину Π_1 площина *ABC* проекціюється в пряму лінію C_1-$A_1 \equiv B_1$, а пряма *DE* – прямою D_1E_1.Точка перетину проекцій прямої та площини визначає допоміжну проекцію K_1 точки перетину прямої *DE* з площиною *ABC*. Зворотнім проекціюванням визначають точку *К* на прямій *DE* за її належністю: $K = ABC \cap DE$.

На комплексному рисунку (див. рис. 12.13) показано рішення цієї задачі. Побудова аналогічна описаній на рис. 12.12 і тому зрозуміла з рисунка.

Пошук точки перетину профільної прямої з площиною загального положення також спрощується при застосування допоміжного косокутного проекціювання.

На рис. 12.14, наведено приклад побудови точки перетину профільної прямої *AB* з площиною заданою слідами h^0f^0. Напрям проекціювання *S* прийнято паралельним горизонтальному сліду h_1^0 площини.

В цьому випадку допоміжна косокутна проекція площини на площині проекцій Π_2 збігається з фронтальним слідом f_2^0 площини.

Проекціювання точок A та B прямої на площину $П_2$ в заданому напрямку S визначить допоміжну косокутну проекцію $\overline{A}_2\overline{B}_2$ прямої AB. Перетин допоміжних косокутних проекцій прямої $\overline{A}_2\overline{B}_2$ та площини (її слідом f_2^0, в який проекціюється площина при допоміжному косокутному проекціюванні) визначить допоміжну проекцію $\overline{K}_2$, точки перетину прямої та площини. Зворотним проекціюванням визначають проекції K_1 та K_2 (точки перетину) на площинах проекцій $П_1$ та $П_2$.

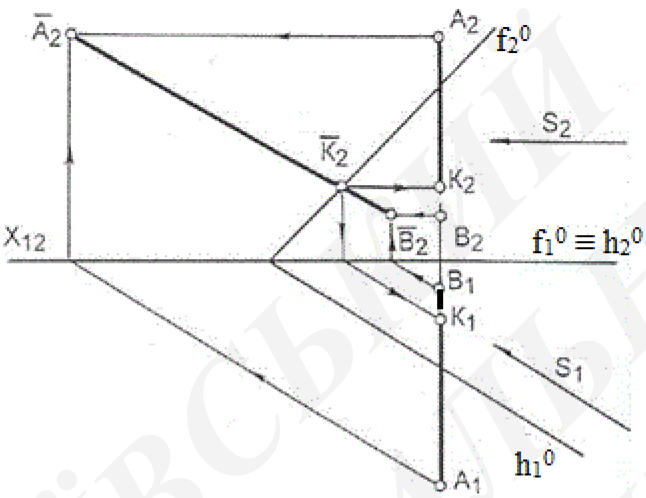


Рис. 12.14

При розв'язанні поставленої задачі допоміжне косокутне проекціювання можна виконувати як на площину проекцій $П_1$ (рис. 12.13) або $П_2$ (рис. 12.14), так і на площини відповідності.

12.5. Перетин двох площин

При розв'язанні задачі на побудову лінії перетину двох площин необхідно керуватись слідуючи правилом: *при проекціюванні однієї площини в пряму (проекціювальне положення), лінія перетину її з іншою площиною також проекціюється на цю проекцію площини в пряму* (див. рис.4.19; 4.20; 4.21).

На рис. 12.15 в напрямку $S//EK$ на площину проекцій $П_1$ виконана побудова допоміжних косокутних проекцій площин ABC та DEK. Точки M_1 та N_1 перетину допоміжних проекцій площин $A_1B_1C_1$ та $D_1E_1K_1$визначають лінію перетину двох площин – M_1-N_1. Зворотним проекціюванням будуються проекції точок M та N лінії перетину площин.

На комплексному рисунку (рис. 12.16) виконана побудова лінії перетину площин, розглянутих на рис. 12.15.

Побудова на комплексному рисунку аналогічна побудові розглянутій на наочному зображенні рис. 12.15 і тому зрозуміла з рисунка.

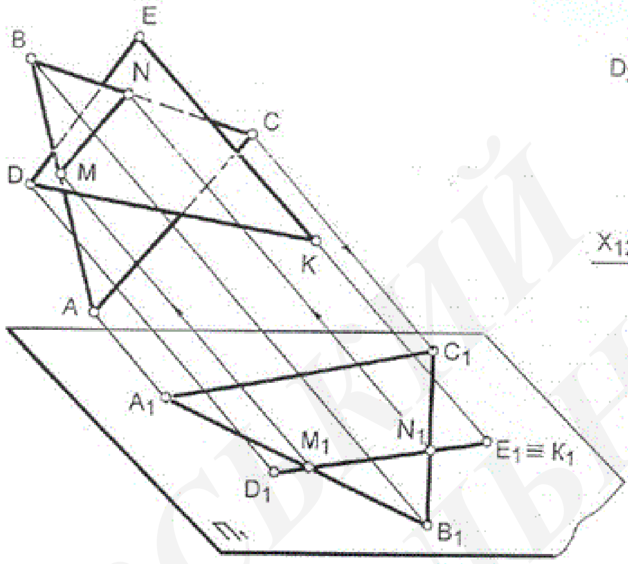


Рис. 12.15

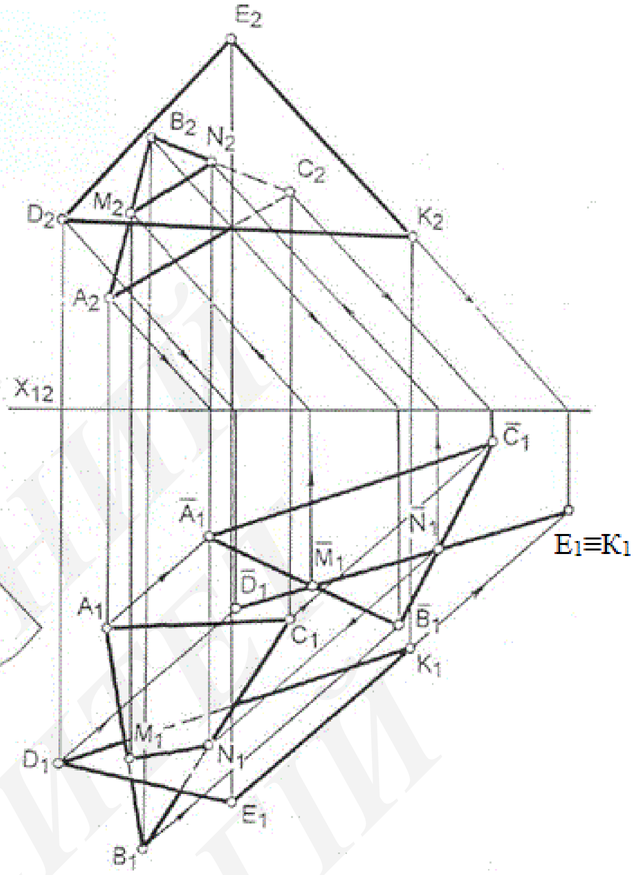


Рис. 12.16

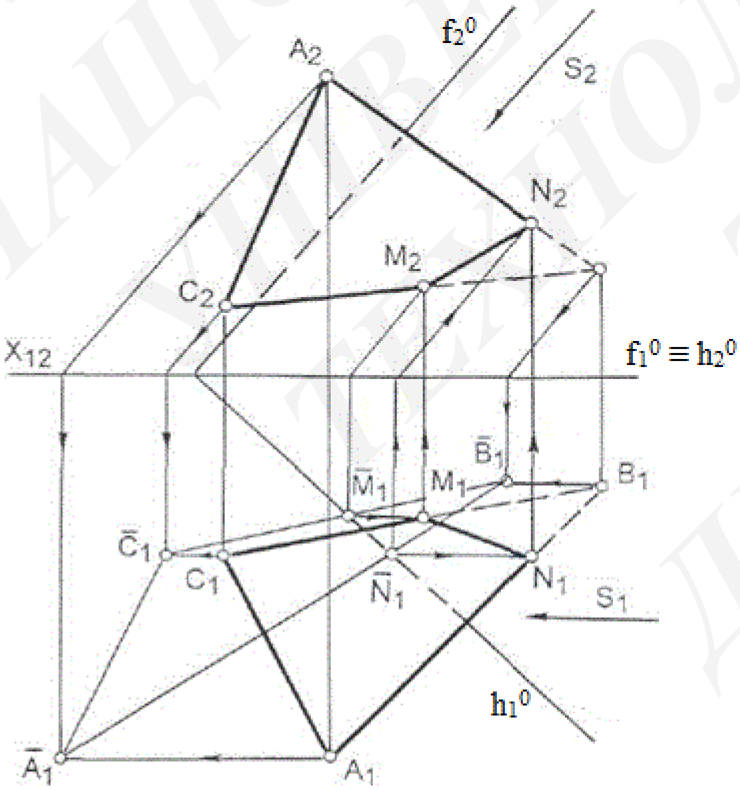


Рис. 12.17

На рис. 12.17. одна із площин, які перетинаються, задана своїми слідами h^0f^0. Допоміжне косокутне проекціювання, яке виконане в напрямку S, паралельному фронтальному сліду f_2^0 площини. Косокутна проекція площини Σ (h^0f^0) при заданому напрямку проекціювання збігається з горизонтальним слідом h_1^0 площини. Побудова допоміжної косокутної проекції $\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{C}_1$площини ABC в заданому напрямку зрозуміла з попередніх побудов та рисунка. Отримані допоміжні косокутні проекції точок $\overline{M}_1$ та $\overline{N}_1$ лінії перетину M-N площин, зворотним проекціюванням визначаються на горизонтальних та фронтальних проекціях площин.

При розв’язанні задач, як метричних так і позиційних, способами перетворення комплексного рисунку, необхідно враховувати, *що вибір найбільш раціонального метода залежить від конкретних умов задачі.*

Інколи доцільно використовувати *комбінований спосіб перетворення проекцій,* тобто одну побудову виконувати заміною площин проекцій, а другу – обертанням (плоско паралельним переміщенням) або навпаки.

12.6. Косокутні проекції лінійчатих поверхонь

Щоб побудувати допоміжну косокутну проекцію геометричної фігури, яка є представником лінійчатої поверхні, необхідно побудувати допоміжні проекції геометричних елементів, які її визначають.

Для побудови допоміжної проекції багатогранника, достатньо побудувати його допоміжну проекцію, яка визначена допоміжними проекціями вершин.

На рис. 12.18 допоміжне проекціювання піраміди виконано в напрямі S на горизонтальну площину проекцій $П_1$.

Точки основи, в цьому прикладі, при допоміжному проекціюванні не змінюють свого положення, так як вони лежать в площині проекцій $П_1$, на яку виконано допоміжне косокутне проекціювання. А змінить положення тільки вершина піраміди T. Її проекціюють на фронтальну та горизонтальну площини проекцій паралельно відповідним проекціям напрямку S_1 та S_2. Для одержання допоміжної проекції піраміди точки основи A_1,B_1 таC_1 сполучають з допоміжною проекцією вершини $\overline{T}_1$. Так побудована допоміжна косокутна проекція піраміди.

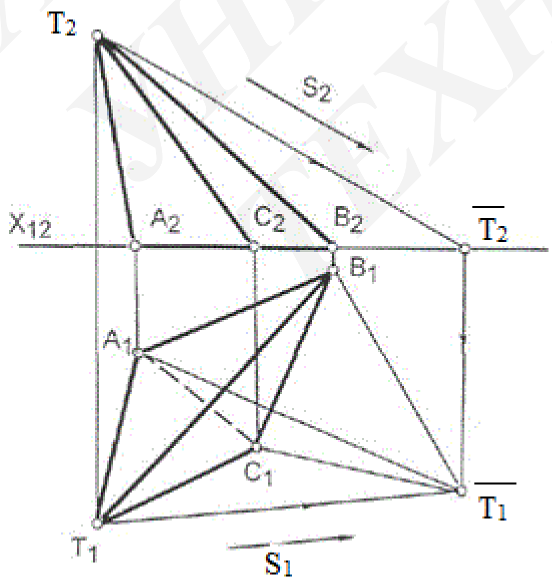


Рис. 12.18

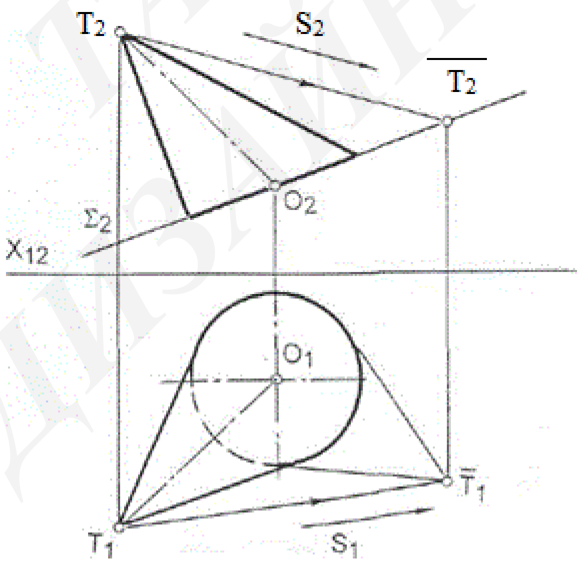


Рис. 12.19

Для того щоб запобігти побудові допоміжної проекції основи геометричної фігури, доцільно в деяких випадках за площину проекцій брати площину основи. Так на рис.12.19 побудована допоміжна проекція конуса в заданому напрямі на основу конуса – площину *Σ*.

На рис. 12.18 та 12.19 застосовано центральне проекціювання, де центр проекціювання – вершина *Т*.

Допоміжні проекції циліндра і призми побудують з використанням паралельного проекціювання.

Всі твірні циліндра паралельні до осі циліндра. Для побудови допоміжної проекції циліндра достатньо побудувати допоміжну проекцію осі циліндра, використавши точку *A*, яка належить його осі. В заданому напрямку *S* будують допоміжну проекцію $\bar{A}_1$ точки *A* на площині основи циліндра (рис. 7.20), яка знаходиться в горизонтальній площині проекцій $П_1$. Так як всі точки основи знаходяться в площині проекцій, то їх допоміжні проекції збігаються з заданим колом. Сполученням точки O_1 з точкою $\bar{A}_1$ одержують допоміжну проекцію осі циліндра. Проведені паралельно до осі $O_1\bar{A}_1$ дотичні до основи циліндра визначать допоміжну косокутну проекцію циліндра.

Ребра призми паралельні між собою. Для побудови косокутної проекції призми (рис. 12.21) використана точка *D,* яка належить ребру *C* призми. Подальша побудова виконується аналогічно побудові розглянутої для циліндра на рис. 12.20.

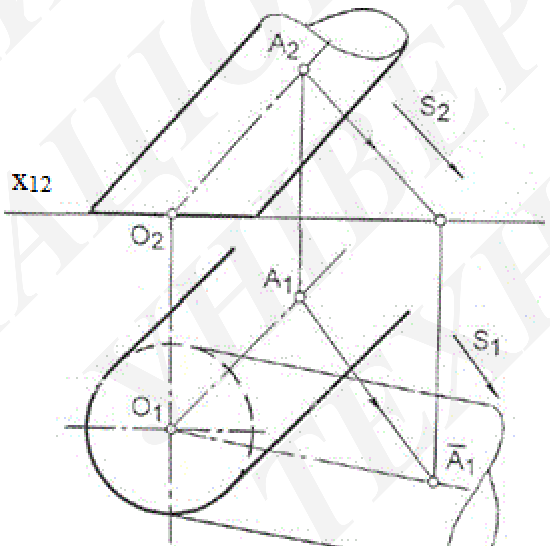


Рис. 12.20

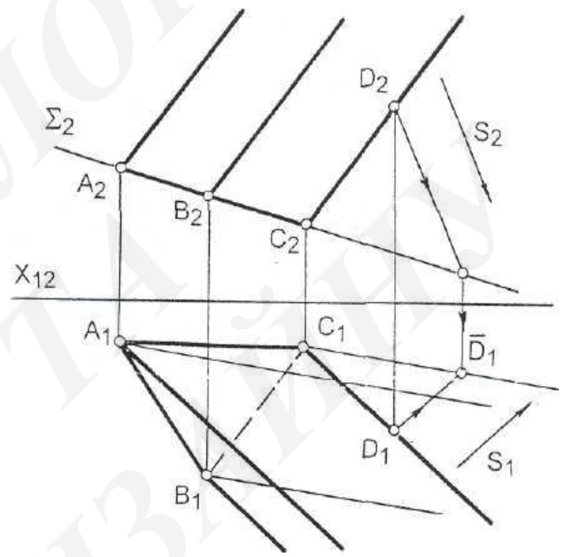


Рис. 12.21

Для розв’язання ряду позиційних задач виникає потреба в проекціювальному положенні лінійчатої поверхні – як граної так і кривої. Це таке положення, коли поверхня проекціюється в свою основу. Для цього використовують як центральне так і паралельне допоміжні проекціювання.

На наочному (див. рис. 12.22) та на комплексному (рис. 12.23) рисунках приведена побудова проекціювальної (виродженої) поверхні піраміди. З рисунків видно, що для розв’язання задачі необхідно використати центральне допоміжне проекціювання, розмістивши його центр в вершині піраміди.

В цьому випадку поверхня піраміди проекціюється ламаною лінією (багатокутником) перерізу поверхні піраміди площиною проекцій $П_1$.

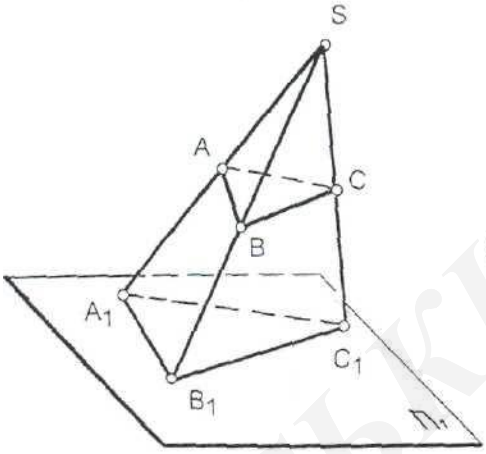


Рис. 12.22

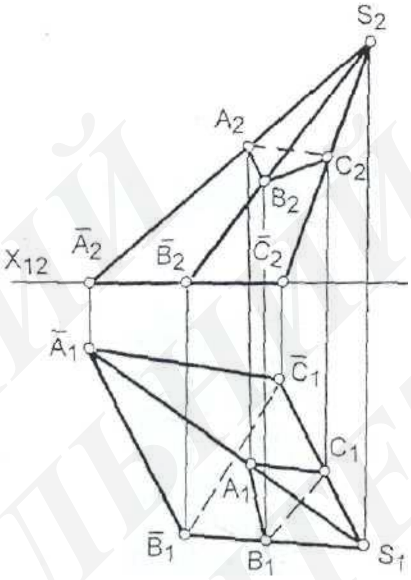


Рис. 12.23

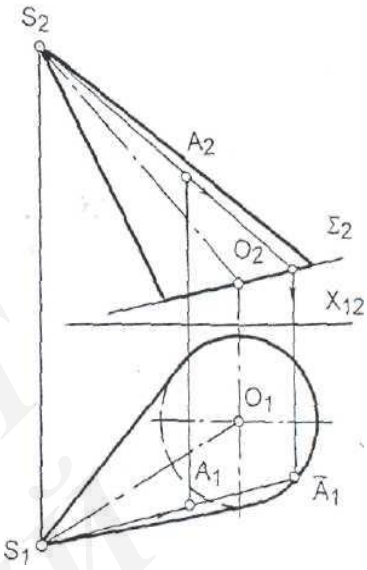


Рис. 12.24

На рис 12.24. одержана центральна проекція конуса, яка збігається з проекцією основи конуса. Кожен проекціювальний промінь, який проходить вздовж кожної твірної, проекціюється в коло основи. На прикладі точки *A* представлено, як точка на твірній, проекціюється в коло основи.

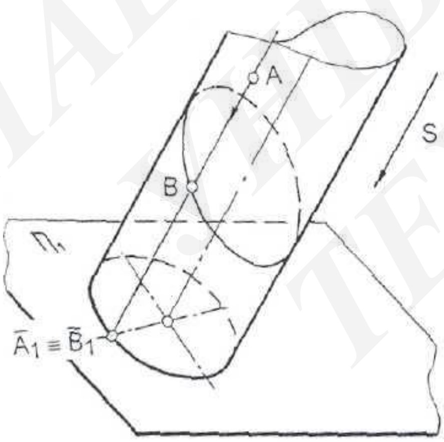


Рис. 12.25

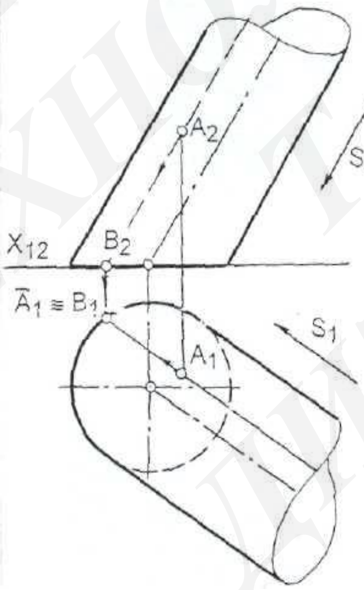


Рис. 12.26

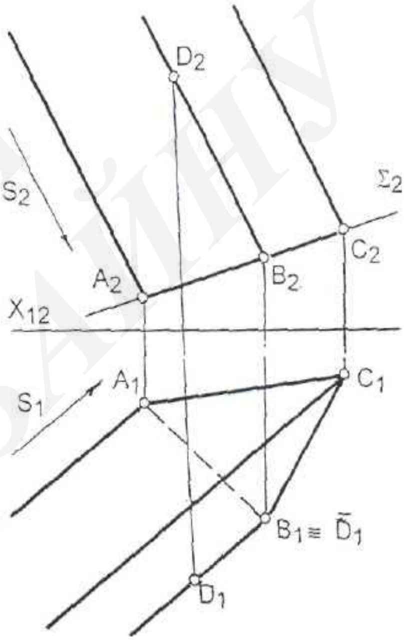


Рис. 12.27

Для одержання проекціювального положення циліндра або призми використовують паралельне проекціювання.

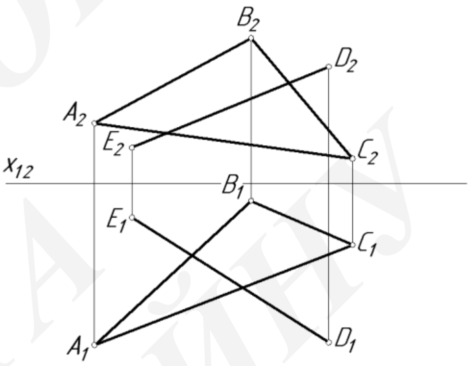
На наочному рисунку (див. рис. 12.25) розглянуто побудову допоміжної проекції в напрямі паралельному осі циліндра.

Побудова проекції проекціювального положення циліндра і призми розглянуто на комплексних креслениках – рис. 12.26 та 12.27.

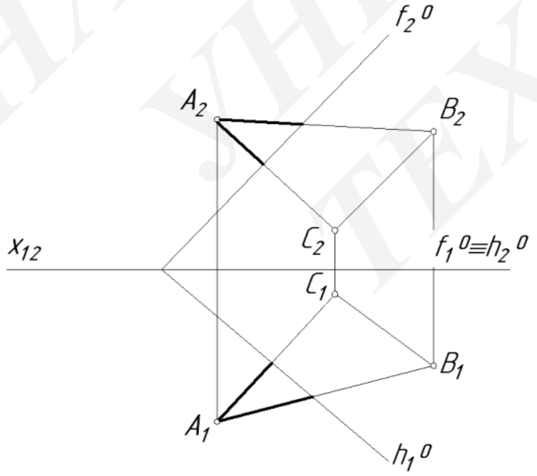
Косокутне проекціювання [15]

***Запитання та завдання для самоконтролю*:**

1. У чому суть допоміжного косокутного проекціювання?
2. Як перетворити пряму загального положення в проекціювальне положення?
3. Як перетворити площину загального положення в проекціювальне положення?
4. Яким перетворенням можна розмістити пряму або площину паралельно площині проекцій?



5. Як перетворити поверхню призми загального положення в проекціювальне положення?
6. Як перетворити поверхню циліндра загального положення в проекціювальне положення?



7. Вибрати напрям допоміжного косокутного проекціювання і побудувати точку перетину прямої з заданою площиною.
8. Вибрати напрям допоміжного косокутного проекціювання і побудувати лінію перетину заданих площин.

Література по темі лекції:

[9] – с. 35-36.

Перелік використаної літератури

1. Богданов В.М. Інженерна графіка : довідник / В.М. Богданов, А.П. Верхола, Б.Д. Коваленко та ін. – Київ : Техніка, 2001. – 268 с.
2. Браїловський В.В. Інженерна та комп’ютерна графіка : навч. посібник для студентів ВНЗ. – Чернівці : Рута, 2008. – 320 с.
3. Ковальов Ю.А., Плешко С.А., Прасол С.І. Нарисна геометрія. Перспектива та тіні : навч. посібник. – Київ : КНУТД, 2017. – 344 с.
4. Ковальов Ю.А., Макатьора Д.А. Графіка в техніці та основи перспективи : навч. посібник. – Київ : КНУТД, 2018. – 394 с.
5. Ковальов Ю.А., Макатьора Д.А. Графічний інжиніринг : навч. посібник. – Київ : КНУТД, 2021. – 414 с.
6. Кущ М.В. Нарисна геометрія : підручник. – Київ : КАККІМ, 2019. – 380 с.
7. Кущ М.В., Князєв В.І. Нарисна геометрія в лекціях. Навчальний посібник. – К.: КНУТД, 2007. – 112 с.
8. Кущ М.В., Ковальов Ю.А., Князєв В.І. та ін. Нарисна геометрія : навч. посібник. – К.: КНУТД, 2010. – 259 с.
9. Михайленко В.Е. і др. Інженерна та комп’ютерна графіка. – Київ : Вища школа, 2000. – 342 с.
10. Хмеленко О.С. Нарисна геометрія : підручник. – Київ : Кондор, 2008. – 440 с.
11. Криві лінії. Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=V7Csi86dYDw&list=PLLfet7GTYaSN_vy--vL-lXy0Jgetaxi_m&ab_channel=%D0%90%D1%80%D1%85%D1%96%D0%B2%D0%B7%D0%B0%D0%BF%D0%B8%D1%81%D1%96%D0%B2%D0%90%D0%9B-22
12. Побудова просторової кривої лінії. Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=tF8uMzQ0AkM&list=PLLfet7GTYaSN_vy--vL-lXy0Jgetaxi_m&index=5&ab_channel=%D0%90%D1%80%D1%85%D1%96%D0%B2%D0%B7%D0%B0%D0%BF%D0%B8%D1%81%D1%96%D0%B2%D0%90%D0%9B-22
13. Криві другого порядку. Youtube: https://www.google.com/search?q=%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%B5%D0%BE+%D0%BF%D1%80%D0%BE+%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D1%96+%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80%D1%85%D0%BD%D1%96&rlz=1C1CHZN_ruUA981UA981&oq=%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%B5%D0%BE+%D0%BF%D1%80%D0%BE+%D0%BA%D1%80%D0%B8%D0%B2%D1%96+%D0%BF%D0%BE%D0%B2%D0%B5%D1%80&aqs=chrome.1.69i57j33i160l2.21924j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8#fpstate=ive&vld=cid:bc2b42cd,vid:YZNVshkQhbU
14. Аксонометричні проекції. Youtube: https://www.google.com/search?q=%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%B5%D0%BE%D0%B

E+%D0%BF%D1%80%D0%BE+%D0%B0%D0%BA%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%87%D0%BD%D1%96+%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B5%D0%BA%D1%86%D1%96%D1%97&rlz=1C1CHZN_ruUA981UA981&oq=%D0%B2%D1%96%D0%B4%D0%B5%D0%BE+%D0%BF%D1%80%D0%BE+%D0%B0%D0%BA%D1%81%D0%BE%D0%BD%D0%BE&aqs=chrome.1.69i57j33i160l4.14648j0j7&sourceid=chrome&ie=UTF-8#fpstate=ive&vld=cid:071fe217,vid:DIR777wkaas

15. Косокутне проекціювання. Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=C6No8djXC4E&ab_channel=GeometricModelsLabs

Предметний покажчик

Навчальне видання

Ковальов Юрій Адиславович
Плешко Сергій Анатолійович
Рубанка Микола Миколайович
Хиневич Руслана Вікторівна

Нарисна геометрія
Точка. Пряма. Площина

Інтерактивний навчальний посібник

Редактор Ю.А. Ковальов
Відповідальний за поліграфічне виконання Л. Л. Овечкіна

Підп. до друку 30.06.2023 р. Формат 60х84 1/16.
Ум. друк. арк. 8,60. Облік. вид. арк. 6,72. Наклад 20 пр. Зам. 1930.

Видавець і виготовлювач Київський національний університет технологій та дизайну.
вул. Мала Шияновська, 2, м. Київ-11, 01011.

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 993 від 24.07.2002.