УДК 517.929.2

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ З АСИМПТОТИЧНО СТАЛИМ ОПЕРАТОРНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ

А. В. Чайковський

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4е, Київ, 03127, Україна
e-mail: chaikovskiyav@ukr.net

О. А. Лагода

Київ. нац. ун-т технологій та дизайну
вул. Немировича-Данченка, 2, Київ, 01011, Україна
e-mail: oksala@ukr.net

We study the problem of existence of a unique bounded solution of a difference equation on a half-axis with asymptotically constant operator coefficients in a Banach space. Necessary and sufficient conditions for the existence and uniqueness of bounded solutions are obtained in the cases of the equation with and without initial condition.

Вивчається питання існування єдиного обмеженого розв'язку різницевого рівняння на напівосі з асимптотично постійним операторним коефіцієнтом у банаховому просторі. Отримано необхідні й достатні умови існування та єдиності обмежених розв'язків для випадків рівняння з початковою умовою та без початкової умови.

Вступ. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ — комплексний банахів простір, $L(X)$ — підпростір лінійних неперервних операторів в X, $I \in L(X)$ — одиничний оператор. Позначимо через $\sigma(A)$ спектр оператора $A \in L(X)$. Термін "підпростір" використовуватимемо для позначення замкненої лінійної підмножини X.

Розглянемо різницеве рівняння на напівосі

$$x_{n+1} = A_n x_n + y_n, \quad n \geq 0, \tag{1}$$

де $\{A_n : n \geq 0\} \subset L(X)$, $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ — відомі послідовності, $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ — шукана.

Рівняння такого типу привертали увагу багатьох провідних спеціалістів з диференціальних рівнянь і вивчалися, зокрема, в роботах А. М. Самойленка, О. А. Бойчука, А. Я. Дороговцева, В. Ю. Слюсарчука, М. Ф. Городнього, О. О. Покутнього та інших (див. роботи [1 – 5] та наведену там бібліографію).

Особливо повно вдалося дослідити рівняння зі сталими коефіцієнтами. Зокрема, добре відомі такі результати щодо обмежених розв'язків рівняння (1) у випадку сталого операторного коефіцієнта.

Теорема 1 [5, 6]. *Різницеве рівняння (1) у випадку $A_n = A$, $n \geq 0$, має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n \mid n \geq 0\} \subset X$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}.$$

Теорема 2 [7]. *Різницеве рівняння (1) у випадку* $A_n = A,\ n \geq 0$, *має обмежений розв'язок* $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ *для довільної обмеженої послідовності* $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ *і довільного* $x_0 \in X$ *тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

У загальному випадку змінного операторного коефіцієнта умови існування та єдиності обмеженого розв'язку пов'язані з умовою дискретної експоненціальної дихотомії (див., наприклад, [8]). Такі умови важко перевіряти, тому важливими є дослідження спеціальних випадків. Одним із напрямків таких досліджень є розгляд кусково-сталих операторних коефіцієнтів для рівнянь на всій осі, які розпочато в роботах [9, 10].

У цій роботі розглянемо інший важливий випадок — асимптотичне наближення коефіцієнта до сталого оператора. А саме, дослідимо питання існування та єдиності обмеженого розв'язку рівняння (1) у випадку змінного оператора, який є асимптотично сталим на нескінченності.

Точні умови асимптотичної поведінки операторів на нескінченності описує таке означення.

Означення 1. *Позначимо через* $As(X)$ *клас усіх послідовностей* $\{B_n : n \geq 1\} \subset L(X)$, *які задовольняють умови:*

1) існує оператор $B \in L(X)$ *такий, що (в операторній нормі)*

$$B_n \to B, \quad n \to +\infty;$$

2) $\forall n \geq 0 : \exists B_n^{-1} \in L(X)$;
3) $\forall n \geq 0 : B_n B = B B_n$;
4) $\exists B^{-1} \in L(X)$;
5) $\exists C > 0 : \forall m, n \geq 0,\ m < n : \prod_{k=m}^{n} \|B^{-1} B_k\| \leq C$;
6) $\exists C > 0 : \forall m, n \geq 0,\ m < n : \prod_{k=m}^{n} \|B_k^{-1} B\| \leq C$.

Рівняння без початкової умови. Позначимо

$$l_\infty(X) := \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \;\middle|\; \sup_{n \geq 1} |x_n| < +\infty \right\}$$

— банахів простір з рівномірною нормою.

Лема 1. *Нехай* $C \in L(l_\infty(X))$ *і послідовність* $\{A_n : n \geq 1\} \subset L(X)$ *має (в операторній нормі) границю* $A \in L(X)$. *Тоді для довільної обмеженої послідовності* $v \in l_\infty(X)$ *існує* $N \in \mathbf{N}$ *і обмежена послідовність* $u \in l_\infty(X)$, *для якої*

$$(A_n - A)(Cu)_n + u_n = v_n, \quad n \geq N. \tag{2}$$

Доведення. Нехай C — ненульовий оператор (інакше твердження очевидне). Використовуючи асимптотичну поведінку операторного коефіцієнта в умові 1), можна знайти настільки велике $N \in \mathbf{N}$, що

$$\forall n \geq N : \quad \|A_n - A\| \|C\| \leq \frac{1}{2}.$$

Шукатимемо потрібну послідовність u в підпросторі

$$l_\infty(X,N) := \left\{ \left(\underbrace{\overline{0},\ldots,\overline{0}}_{N-1}, x_N, x_{N+1},\ldots \right) \,\middle|\, x \in l_\infty(X) \right\}$$

простору $l_\infty(X)$.

Позначимо $(Dx)_n = (A_n - A)x_n,\ n \geq N$. Тоді D — лінійний неперервний оператор у просторі $l_\infty(X,N)$ з нормою, що не перевищує $\dfrac{1}{2\|C\|}$.

Нехай P_N — проєктор з простору $l_\infty(X)$ у підпростір $l_\infty(X,N)$, який перетворює перші $N-1$ координат на нульові елементи. Позначимо $C_N = P_N C$. Тоді C_N — лінійний обмежений оператор у просторі $l_\infty(X,N)$ з нормою, що не перевищує $\|C\|$.

Тепер ми можемо переписати рівняння (2) як рівняння у просторі $l_\infty(X,N)$ вигляду

$$DC_N u + u = P_N v.$$

Оскільки

$$\|DC_N\| \leq \frac{1}{2\|C\|}\,\|C\| = \frac{1}{2} < 1,$$

то це рівняння має єдиний розв'язок $u \in l_\infty(X,N)$.

Лема 2. *Нехай послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ належить до класу $As(X)$ і має границю $A \in L(X)$. Позначимо*

$$R(n,m) := A_n A_{n-1} \ldots A_{m+1}, \quad n > m \geq -1, \quad R(n,n) = I, \quad n \geq -1,$$

$$R(m,n) := (R(n,m))^{-1}, \quad n > m \geq -1.$$

Довільний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$x_n = R(n-1,-1)x_0 + R(n-1,0)y_0 + R(n-1,1)y_1 + \ldots + R(n-1,n-1)y_{n-1}, \quad n \geq 1,$$

та існує стала $L > 0$ така, що

$$\forall m \geq -1,\ \ n \geq -1\colon \quad L^{-1} \leq \|R(n,m)A^{m-n}\| \leq L.$$

Доведення. За індукцією легко перевірити, що формула для розв'язку справедлива. З умов 5), 6) означення класу $As(X)$ випливає існування такої сталої $C > 1$, що

$$\forall n \geq 0\colon \quad \prod_{m=0}^{n-1} \left\|A_m^{-1}A\right\| \in [1/C, C],$$

$$\forall n \geq 0\colon \quad \prod_{m=0}^{n-1} \left\|A^{-1}A_m\right\| \in [1/C, C].$$

Тоді для $n > m \geq -1$ маємо

$$\left\|R(n,m)A^{m-n}\right\| = \left\|A_n A^{-1} \ldots A_{m+1}A^{-1}\right\| \leq \prod_{k=m+1}^{n} \left\|A_k A^{-1}\right\| \leq C^2,$$

$$\left\|R(m,n)A^{n-m}\right\| = \left\|A_{m+1}^{-1}A\ldots A_n^{-1}A\right\| \le \prod_{k=m+1}^{n}\left\|A_k^{-1}A\right\| \le C^2,$$

$$\left\|R(n,m)A^{m-n}\right\| \ge \left\|R(m,n)A^{n-m}\right\|^{-1} \ge 1/C^2,$$

$$\left\|R(m,n)A^{n-m}\right\| \ge \left\|R(n,m)A^{m-n}\right\|^{-1} \ge 1/C^2$$

і можна покласти $L = C^2$.

Теорема 3. *Нехай послідовність $\{A_n : n \ge 1\}$ належить до класу $As(X)$ і має границю $A \in L(X)$. Різницеве рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n \mid n \ge 0\} \subset X$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \ge 0\} \subset X$ тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}.$$

Доведення. *Необхідність*. Нехай для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \ge 0\} \subset \subset X$ існує єдиний обмежений розв'язок $\{x_n \mid n \ge 0\} \subset X$.

Згідно з теоремою Банаха про обернений оператор існує лініний неперервний оператор $C : l_\infty(X) \to l_\infty(X)$, який довільну обмежену послідовність $\{y_n \mid n \ge 0\} \subset X$ перетворює на відповідний обмежений розв'язок $\{x_n \mid n \ge 0\} \subset X$ рівняння (1).

Припустимо від супротивного, що існує $z \in \sigma(A)$, $|z| \le 1$. Тоді можливий один із двох випадків:

1) z — власне число оператора A:

$$\exists v \in X,\ \ v \ne \overline{0}: \quad Av = zv.$$

Оскільки $|z| \le 1$, послідовність $\left\{A^n v : n \ge 1\right\}$ обмежена. За лемою 2

$$\|R(n,-1)v\| = \left\|R(n,-1)A^{-n}A^n v\right\| \le L\,\|A^n v\|\,, \quad n \ge -1,$$

звідки випливає обмеженість послідовності $\{R(n-1,-1)v : n \ge 0\}$. Але ця послідовність є розв'язком однорідного рівняння (1). А тому що оператор $R(n-1,-1)$ має обернений, то це нетривіальний розв'язок. Суперечність.

2) z не є власним числом оператора A, але існує такий елемент $v \in X$, що

$$\forall x \in X: \quad (A - zI)x \ne v.$$

Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$x_{n+1} = Ax_n + (A_n - A)x_n + y_n, \quad n \ge 0. \tag{3}$$

Використовуючи лему 1, можемо знайти таке $N \in \mathbf{N}$ і таку обмежену послідовність $\{y_n \mid n \ge 0\} \subset X$, що

$$(A_n - A)(Cy)_n + y_n = z^n v, \quad n \ge N.$$

Відповідний до цієї послідовності обмежений розв'язок рівняння (3) $x = Cy \in l_\infty(X)$ задовольняє рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n + z^n v, \quad n \ge N. \tag{4}$$

Це рівняння не може мати іншого обмеженого розв'язку, тому що обмеженість послідовності $\{A^n x_N : n \geq N\}$ веде до суперечності так само, як у випадку 1.

Але $\{w_n = z^{-1}x_{n+1} : n \geq N\}$ — також обмежений розв'язок рівняння (4). Тому $x_n = z^{-1}x_{n+1},\ n \geq N$. Тоді $x_n = z^{n-N}x_N,\ n \geq N$. Підставляючи в (4), отримаємо

$$z^{1-N}x_N = Az^{-N}x_N = v \Leftrightarrow (A - zI)\left(-z^{-N}x_N\right) = v.$$

Суперечність.

Достатність. Нехай справджується включення $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| > 1\}$. З нього випливає, що спектральний радіус оператора A^{-1} менше 1, тому

$$\exists C > 0\ \ \exists \varepsilon \in (0,1)\ \ \forall n \in \mathbf{N}: \quad \|A^{-n}\| \leq C(1-\varepsilon)^n.$$

Використовуючи лему 2, одержуємо

$$\|R(m,n)\| \leq L\left\|A^{m-n}\right\| \leq LC(1-\varepsilon)^{n-m}, \quad n > m \geq -1.$$

Тепер для довільного обмеженого розв'язку $\{x_n \mid n \geq 1\}$, використовуючи зображення з леми (2), маємо

$$x_0 + R(-1,0)y_0 + R(-1,1)y_1 + \ldots + R(-1,n-1)y_{n-1} = R(-1,n-1)x_n \to \overline{0}, \quad n \to \infty.$$

Тому елемент

$$x_0 = -\sum_{k=0}^{\infty} R(-1,k)y_k$$

визначено однозначно. Розв'язок, що починається з цього елемента, обмежений внаслідок оцінки

$$\|x_n\| = \left\|\sum_{k=n}^{\infty} R(n-1,k)y_k\right\| \leq \|y\|_\infty \sum_{k=n}^{\infty} LC(1-\varepsilon)^{k-n+1} \leq \frac{LC}{\varepsilon}\,\|y\|_\infty.$$

Приклад 1. Розглянемо у просторі $X = C([0,1])$ з рівномірною нормою оператори

$$(A_n x)(t) = e^{t+a}(1 + t^n - t^{n+1/n})x(t), \quad t \in [0,1], \quad n \geq 1,$$

де $a \in \mathbf{R}$ — деяка стала. Такі оператори мають рівномірну границю A, яку задає рівність

$$(Ax)(t) = e^{t+a}x(t), \quad t \in [0,1].$$

Дійсно, враховуючи, що функція $g(t) = t^n - t^{n+1/n}$ набуває найбільшого на відрізку $[0,1]$ значення у точці $t = \left(\dfrac{n^2}{n^2+1}\right)^n$, маємо

$$\|A_n - A\| = \max_{t\in[0,1]}\left|t^n - t^{n+1/n}\right| = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} - \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2+1} = r_n,$$

причому

$$r_n = \frac{1}{n^2+1}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} \sim \frac{e^{-1}}{n^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Перевіримо для послідовності $\{A_n : n \geq 1\}$ інші умови належності до класу $As(X)$. Усі наведені оператори мають обернені й комутують між собою. Крім того,

$$\left\|A_n A^{-1}\right\| = \max_{t\in[0,1]} \left|1 + t^n - t^{n+1/n}\right| = 1 + r_n,$$

$$\left\|A A_n^{-1}\right\| = \max_{t\in[0,1]} \left|(1 + t^n - t^{n+1/n})^{-1}\right| = 1.$$

Оскільки нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + r_n)$ збіжний, то умови 5, 6 справджуються.

Спектр оператора A — це відрізок $\left[e^a, e^{1+a}\right]$ дійсної прямої у комплексній площині.

Застосування теореми 3 показує, що рівняння (1) має єдиний обмежений розв’язок для довільної відомої обмеженої послідовності у випадку $a > 0$. У інших випадках умову існування та єдиності порушено.

Рівняння з початковою умовою.

Теорема 4. *Нехай послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ належить до класу $As(X)$ і має границю $A \in L(X)$. Різницеве рівняння (1) має обмежений розв’язок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ для довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ і довільного $x_0 \in X$ тоді й лише тоді, коли*

$$\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}. \tag{5}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай для довільного $x_0 \in X$ і довільної обмеженої послідовності $\{y_n \mid n \geq 0\} \subset X$ розв’язок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset X$ обмежений.

1. Нехай $y_n = \overline{0},\ n \geq 0,$ і $x_0 \in X$ довільний. У цьому випадку розв’язок набуває вигляду

$$x_n = R(n-1, -1)x_0, \quad n \geq 1.$$

З обмеженості розв’язку випливає, що

$$\forall x_0 \in X: \quad \sup_{n\geq 0} \|R(n-1,-1)x_0\| < +\infty.$$

За теоремою Банаха – Штейнгауза маємо

$$\sup_{n\geq 0} \|R(n-1,-1)\| < +\infty. \tag{6}$$

2. Нехай $y_n = R(n, -1)z_0,\ n \geq 0,$ і $x_0 \in X,\ z_0 \in X$ довільні. У цьому випадку розв’язок має вигляд

$$x_n = R(n-1,-1)(x_0 + nz_0), \quad n \geq 1.$$

Оскільки розв’язок обмежений і справджується умова (6), маємо

$$\forall z_0 \in X: \quad \sup_{n\geq 1} \left\|nR(n,-1)z_0\right\| < +\infty. \tag{7}$$

За теоремою Банаха – Штейнгауза одержуємо

$$\sup_{n\geq 1} \|nR(n,-1)\| < +\infty. \tag{8}$$

3. Нехай

$$y_n = (n+1)R(n,-1)z_0, \quad n \geq 0,$$

і $x_0 \in X,\ z_0 \in X$ довільні. Ця послідовність обмежена внаслідок (8). За індукцією легко перевірити, що розв'язок має вигляд

$$x_n = R(n-1,-1)\left(x_0 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, z_0\right), \quad n \geq 0.$$

Оскільки розв'язок обмежений і справедливе співвідношення (6), то

$$\forall y_0 \in X: \quad \sup_{n\geq 1}\left\|n^2 R(n,-1)\right\| < +\infty.$$

Використовуючи умови означення класу $As(X)$ і оцінку

$$\|A^n\| = \left\|R(n-1,-1)A_0^{-1}A\ldots A_{n-1}^{-1}A\right\| \leq \|R(n,-1)\| \prod_{k=0}^{n-1}\left\|A_k^{-1}A\right\|, \quad n \geq 1,$$

отримуємо обмеженість послідовності $\left\{n^2 A^n : n \geq 1\right\}$.

Звідси випливає, що для довільного $z \in \mathbf{C},\ |z| \geq 1,$ збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\|z^{-n}A^n\right\|,$$

а отже, існує обернений оператор $(A - zI)^{-1} \in L(X)$.

Тому умова $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ виконується.

Достатність. Нехай умова (5) виконується. З цього випливає, що спектральний радіус оператора A менший за 1, тому

$$\exists C > 0 \ \ \exists \varepsilon \in (0,1) \ \ \forall n \geq 0: \quad \|A^n\| \leq C(1-\varepsilon)^n.$$

Використовуючи лему 2, маємо

$$\|R(n,m)\| \leq L\|A^{n-m}\| \leq LC(1-\varepsilon)^{n-m}, \quad n \geq m \geq -1.$$

Тому розв'язок рівняння (1) обмежений для довільного $x_0 \in X$:

$$\|x_n\| \leq \|R(n-1,-1)x_0\| + \left\|\sum_{k=0}^{n-1} R(n-1,k)y_k\right\| \leq$$

$$\leq CL(1-\varepsilon)^n\|x_0\| + \|y\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1} CL(1-\varepsilon)^{n-1-k} \leq \frac{CL}{\varepsilon}\,\|y\|_\infty + CL\|x_0\|, \quad n \geq 1.$$

Приклад 2. У просторі $X = C([0,1])$ з рівномірною нормою розглянемо оператори

$$(A_n x)(t) = e^{t+a}(1 + t^n - t^{n+1/n})x(t), \quad t \in [0,1],$$

де $a \in \mathbf{R}$ — деяка стала. Такі оператори мають рівномірну границю A, задану рівністю

$$(Ax)(t) = e^{t+a}x(t), \quad t \in [0,1].$$

Як показано у прикладі 1, послідовність $\{A_n : n \geq 1\}$ належить до класу $As(X)$, спектр оператора A — це відрізок $\left[e^a, e^{1+a}\right]$ дійсної прямої в комплексній площині.

Застосовуючи теорему 4, бачимо, що рівняння (1) має обмежений розв'язок для довільної відомої обмеженої послідовності у випадку $a < -1.$ У інших випадках умова існування не виконується.

Література

1. А. Я. Дороговцев, *Периодические и стационарные режимы бесконечномерных динамических систем*, Вища шк., Киев (1992).
2. В. Ю. Слюсарчук, *Стійкість розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі*, УДУВГП, Рівне (2003).
3. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. Second edition*, De Gruyter, Berlin (2016).
4. О. О. Покутний, *Розв'язки лінійних різницевих рівнянь в банаховому просторі, обмежені на всій цілочисельній вісі*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки, № 1, 182 – 188 (2006).
5. М. Ф. Городній, О. А. Лагода, *Обмеженість розв'язків двопараметричного різницевого рівняння у банаховому просторі*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки, № 3, 94 – 98 (1999).
6. И. В. Гайшун, *Устойчивость двухпараметрических дискретных систем с коммутирующими операторами*, Дифференц. уравнения, **32**, № 2, 216 – 224 (1996).
7. Ю. В. Томілов, *Асимптотична поведінка однієї рекурентної послідовності в банаховому просторі*, Асимптотичне інтегрування нелінійних рівнянь, Інститут математики АН України, Київ (1992).
8. D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer-Verlag, Berlin; New York (1981).
9. І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі стрибком операторного коефіцієнта*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки, **2**, 25 – 28 (2016).
10. М. Ф. Городній, І. В. Гончар, *Про обмежені розв'язки різницевого рівняння зі змінним операторним коефіцієнтом*, Допов. НАН України, № 12, 12 – 16 (2016).

Одержано 23.10.21,
після доопрацювання — 26.11.21