

УДК 615-65

**МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ В ЗАДАЧАХ
ФОРМИРОВАНИЯ КОЖЕВЕННЫХ И МЕХОВЫХ МАТЕРИАЛОВ**

О. В. Сангинова, А. Г. Данилкович, С. В. Брановицкая

**БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ В ЗАДАЧАХ ФОРМУВАННЯ
ШКІРЯНИХ ТА ХУТРОВИХ МАТЕРІАЛІВ**

О. В. Сангінова, А. Г. Данилкович, С. В. Брановицька

**MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION IN FORMATION OF LEATHER
AND FUR MATERIALS TASKS**

O. Sanginova, A. Danilkovich, S. Branovickaya

В работе выполнен сравнительный анализ эффективности различных способов получения компромиссного решения в задачах условной многокритериальной оптимизации. Исследование проводилось для ряда инновационных технологий формирования материалов из кожи и меха.

Ключевые слова: компромиссная область, задача оптимизации, физико-химические процессы, кожаные и меховые материалы.

The comparative analysis of the efficiency of different ways to obtain a compromise solution in the multi-objective constrained optimization tasks has been conducted. The analysis was performed for a number of innovative technologies of leather and fur materials forming.

Keywords: compromise area, optimization task, physical and chemical processes, leather and fur materials.

1. Введение

К настоящему времени накоплен значительный опыт решения задач многокритериальной оптимизации. Существующие методы решения основаны на сведении исходной задачи к одной или нескольким задачам однокритериальной оптимизации. Известно, что от выбора схемы компромисса для конкретной задачи зависит трудоемкость, а иногда и возможность ее решения; при этом решения, полученные для одного класса задач, могут оказаться непригодными либо неэффективными для другого класса задач [1 – 3]. Эффективность рассмотренных ниже схем компромиссов проанализирована на примере моделей, представленных наиболее распространенными типами уравнений, описывающих различные процессы и стадии получения кожаных и меховых материалов.

Целью данной работы является сравнительный анализ эффективности некоторых наиболее часто используемых вычислительных схем получения компромиссных решений для процессов формирования кожевенных и меховых материалов.

2. Постановка проблемы

Пусть качество объекта оптимизации оценивается вектор-функцией

$$f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})), \quad (1)$$

компонентами которой являются заданные функции $f_j(\bar{x})$ ($j = 1, 2, \dots, k$)

вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Вектор \bar{x} , таким образом, принадлежит множеству

X его возможных значений. На переменные x_i ($i = \overline{1, n}$), как правило, накладываются ограничения вида

$$l_j \leq x_j \leq u_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

либо

$$q_i(\bar{x}) \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (3)$$

Будем называть множеством допустимых значений вектора \bar{x} ограниченное и замкнутое множество D , которое формируют ограничивающие функции (2) и (3).

Требуется найти такую точку $\bar{x}^* \in D$, которая обеспечит оптимальное значение функций $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})$ на множестве D .

В рассматриваемом случае поставленная цель характеризуется несколькими функциями $f_i(\bar{x})$, а задача оптимизации заключается в поиске условного минимума или максимума всех критериев. Решение сформулированной задачи требует нахождения компромисса между критериями $f_1(\bar{x}), f_2(\bar{x}), \dots, f_k(\bar{x})$, которые в общем случае являются противоречивыми.

Существует два основных подхода к выбору схемы компромисса: приоритетный подход [1–4] и свертка критериев, т.е. приведение векторной задачи к задаче с одним скалярным критерием [2, 3]. В работе выполнен сравнительный анализ методов, относящихся к первому подходу: метода главного критерия, метода приоритетов и метода уступок.

3. Обзор вычислительных схем получения компромиссного решения

Приведенный ниже литературный обзор охватывает характеристику наиболее часто используемых схем компромиссов и особенности математического описания процессов кожевенного и мехового производства.

Выше показано, что компромисс формируется либо путем свертки критериев, либо последовательно, начиная с наиболее важной задачи. Различные способы сверток и анализ их эффективности достаточно широко представлены в литературе [1–5]. Наиболее часто используются такие виды сверток, как аддитивная и мультипликативная свертки [3, 5], свертка Гермейера [2], метод идеальной точки [2], функция желательности Харрингтона [6, 7] и некоторые другие [1–4]. Общим недостатком данных методов является субъективность обоснования весовых коэффициентов обобщенной целевой

функции и выбора способа свертки. В работах [1, 2] показано, что не всегда низкая оценка по одному критерию может быть компенсирована более высокой по другому.

Использование некоторых видов сверток предусматривает наличие ограничений: например, при построении аддитивной и мультипликативной обобщённой целевой функции множество допустимых решений должно быть выпуклым, при этом в случае мультипликативной свертки дополнительно требуется вогнутость всех функций $\ln f_i(\bar{x})$, $i = 1, 2, \dots, k$ [1, 2]. Невыполнение этих условий может привести к результатам, противоречащим здравому смыслу. В задачах по оптимизации эксперимента в химии и химической технологии для нахождения компромисса наиболее часто используется функция желательности Харрингтона [6, 8, 9], однако этот метод предполагает равный вклад всех частных целевых функций. Метод идеальной точки в практических задачах оптимизации физико-химических процессов не всегда позволяет найти решение, удовлетворяющее технологическим ограничениям, поскольку формулирует лишь необходимые условия оптимума.

Задачи с приоритетами предполагают последовательное формирование решения: частные критерии ранжируются в порядке их важности, и поиск решения для менее важного критерия осуществляется только после оптимизации вышестоящей целевой функции. В литературе достаточно подробно описаны такие методы, как метод главного критерия, метод приоритетов и метод уступок [2, 4]. В отличие от метода главного критерия, в методах приоритетов и уступок цели низших уровней могут влиять на решение. Данная группа методов редко применяется при решении практических задач многокритериальной оптимизации химико-технологических процессов, поскольку поиск компромиссной области часто осуществляется экспериментально [6–8] либо с использованием различных сверток [3, 5]; поэтому сравнительный анализ эффективности задач с приоритетами представляет интерес.

Анализ публикаций, посвященных математическому моделированию физико-химических процессов кожевенного производства, показал, что авторами используются преимущественно алгебраические уравнения, полученные в результате обработки экспериментальных данных [6, 7, 10]. Это наиболее простая и удобная форма записи математических моделей, используемая в случае неполной информации о специфике протекания процесса:

$$y_j = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{\substack{u,i=1 \\ u \neq i}}^n a_{ui} x_u x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \dots, \quad j = \overline{1, k}, \quad (4)$$

где y – параметры состояния, x – параметры управления, a – постоянные коэффициенты.

Дифференциальные уравнения используют для моделирования динамических процессов с непрерывным временем. В публикациях, посвященных моделированию процессов химической технологии, для описания объектов с сосредоточенными параметрами применяют обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) первого порядка

$$\frac{dy_j}{dt} = \varphi(y_1, \dots, y_k; x_1, \dots, x_n; t), \quad j = \overline{1, k}, \quad (5)$$

а для описания объектов с распределенными параметрами – дифференциальные уравнения второго и более высокого порядков. Модели в приращениях описывают процессы с дискретным временем либо установившиеся процессы.

Таким образом, сравнение эффективности различных вычислительных схем получения компромиссного решения задач многокритериальной оптимизации для процессов формирования кожевенных и меховых материалов является актуальной задачей.

4. Исследование эффективности различных методов получения компромиссного решения

Ниже приведен сравнительный анализ эффективности указанных выше вычислительных схем компромиссов касательно процессов, протекающих при формировании кожевенных и меховых материалов. Математические модели, выбранные для исследования, описывают основные физико-химические процессы производства кожи и меха: отмочно-зольные, дубильные и отделочные. Краткая характеристика моделей представлена в табл. 1. Множество эффективных точек для каждой модели найдено в результате проведения ряда натуральных и имитационных экспериментов.

Таблица 1

Краткая характеристика математического описания исследуемых физико-химических процессов

Стадия производства	Процесс	Вид уравнений	Количество параметров состояния/управления	Задача оптимизации
1. Подготовка кожевенного сырья	1.1. Одностадийный процесс обезволашивания-зольения	а) алгебраические; б) ОДУ	2/4	u_1 – минимизация, u_2 – максимизация
	1. 2 Универсальный процесс обезволашивания-зольения	алгебраические	3/3	минимизация
2. Стабилизация и формирование структуры	2.1. Дубление недвоенного голя	алгебраические	4/3	максимизация
	2.2. Дубление-жирование меховой овчины	а) алгебраические; б) ОДУ	5/3	максимизация

полуфабриката				
3. Отделка кожевенного и мехового полуфабриката	3.1. Формирование лакового покрытия	алгебраические	4/3	максимизация
	3. 2. Формирование модифицированного эмульсионного покрытия	а) алгебраические; б) ОДУ	3/3	максимизация

Рассмотрим более подробно математическое описание физико-химических процессов формирования структуры полуфабриката – голя на стадии обезволашивания-зольения шкур крупного рогатого скота, особенности которых подробно проанализированы в [6, 7]. Поиск компромиссного решения минимизации расхода сырья, $кг/100м^2$ кожи (y_1) и максимальной сортности полученных кож, % (y_2), при минимальных расходах щёлочных реагентов для подготовки кожевенного сырья к дальнейшим технологическим процессам проведено в условиях публичного АТ «Чинбар» с использованием шкур мокросолёного консервирования. Технология предусматривает проведение всех отмочно-зольных процессов при температуре и расходе щёлочных реагентов представленных в табл. 2.

Таблица 2

Параметры плана эксперимента

Фактор	Обозначение	Уровень		
		-1	0	+1
Концентрация, $кг/м^3$				
карбоната натрия	x_1	0	4	8
сульфида натрия	x_2	6	9	12
гидроксида кальция	x_3	3	8	13

Температура процесса, °С	x_4	24	28	32
--------------------------	-------	----	----	----

Процессы проводились при постоянном соотношении технологический раствор/сырьё равном $1,3 \text{ м}^3/\text{т}$. Продолжительность процессов, час.: восстановление равновесной влаги кожевенного сырья – 6, обезволашивание-золение – 10-12, межоперационные промывки – 1 при расходе воды $2 \text{ м}^3/\text{т}$.

Основными целями оптимизации исследуемой технологии является увеличение выхода площади кожи с единицы сырья и минимизация расхода реагентов. Выходные переменные, полученные после реализации D-оптимального плана второго порядка, представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты эксперимента

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_1	632,2	631,8	643,5	645,8	644,2	642,5	649,8	649,1	636,2	638,1	649,2	647,1
y_2	89,4	89,7	88,5	88,8	89,6	89,7	89,8	89,9	90,6	90,8	90,4	89,9
y_1	664,7	663,2	666,2	668,4	638,9	636,7	646,7	736,1	649,3	635,5	659,9	636,4
y_2	89,5	89,4	89,2	89,2	91,7	91,7	91,1	91,8	90,2	90,7	90,3	89,7

В результате обработки экспериментальных данных получена математическая модель физико-химических процессов отмоки-золения кожевенного сырья крупного рогатого скота:

$$\begin{cases} y_1 = 640,6 - 4,3x_2 - 7,7x_3 - 6,5x_4 - 1,8x_2x_3 + 3,7x_3x_4 - \\ \quad - 2,5x_1^2 + 2,1x_3^2 + 7,9x_4^2 \\ y_2 = 91,32 + 0,21x_2 + 0,13x_3 - 0,23x_4 - 0,075x_1x_4 + 0,175x_2x_3 - \\ \quad - 0,144x_3x_4 + 0,38x_1^2 + 0,13x_2^2 - 0,87x_3^2 - 7,9x_4^2 \end{cases}, \quad (6)$$

где x_1 – концентрация карбоната натрия в растворе отмока, $г/дм^3$; x_2 – концентрация сульфида натрия в зольном растворе, $г/дм^3$; x_3 – концентрация гидроксида кальция в зольном растворе, $г/дм^3$; x_4 – температура процесса отмока и золена, $^{\circ}C$; y_1 – расход сырья на $100 м^2$ кожи, $кг/100м^2$; y_2 – сортность полученных шкур, %.

Математическое описание динамики процесса может быть представлено в форме обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -0,0283y_1 - 0,188x_1 - 0,182x_2 - 0,787x_3 - 1,009x_4 \\ \frac{dy_2}{dt} = -1,56 \cdot 10^{-3}y_2 - 1,11 \cdot 10^{-3}x_1 + 0,068x_2 - 0,039x_3 - 0,022x_4 \end{cases} \quad (7)$$

Начальные условия:

$$y_1(0) = 640, \quad y_2(0) = 91 \quad (8)$$

Ограничения на переменные

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 8, \quad 6 \leq x_2 \leq 12 \quad & 88,5 \leq y_1 \leq 91,8 \\ 3 \leq x_3 \leq 13, \quad 24 \leq x_4 \leq 32 \quad & 631,8 \leq y_2 \leq 736,1, \quad (9) \end{aligned}$$

По оценке экспертов, оба показателя качества имеют примерно одинаковый вес, хотя более важным с экономической точки зрения является первый показатель – расход сырья на $100 м^2$ кожи.

Подробное описание остальных процессов (табл. 1) представлено в [6–8].

Ниже кратко рассмотрена суть каждого из методов получения компромиссного решения и пример решения для модели (6), (9). Ранжирование критериев во всех методах осуществляется лицом, принимающим решение (ЛПР) либо несколькими экспертами. В последнем случае следует проверить согласованность мнений экспертов.

В соответствии с методом главного критерия, поиск оптимального решения начинают с выбора одной из целевых функций, наиболее полно

отражающей цель принятия решения. Критерии y_2, \dots, y_k ($j = \overline{1, k}$) заменяют ограничениями.

Например, $f_1(\bar{x}) \rightarrow \max$ – главный критерий, тогда остальные критерии примут вид: $f_2(\bar{x}) \rightarrow g_2, \dots, f_2(\bar{x}) \rightarrow g_2, \dots, f_k(\bar{x}) \rightarrow g_k$, где $g_j, j = \overline{1, k}$ – ограничения. Тогда исходная задача сводится к решению однокритериальной задачи оптимизации относительно "главного" критерия.

Рассмотрим подробнее алгоритм метода на примере модели (6), (9). На первом шаге минимизируется показатель y_1 . Поиск оптимума в рассматриваемом и последующих примерах проводился методом Бокса, поскольку данный метод позволяет учитывать ограничения вида (2), (3). Алгоритм метода Бокса подробно описан, например, в [5]. Координаты минимума и соответствующее им значение первого критерия y_1 :

$$x_1 = 7,4 \text{ г/дм}^3; x_2 = 10,2 \text{ г/дм}^3; x_3 = 12,4 \text{ г/дм}^3; x_4 = 28 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$y_1 = 630,0 \text{ кг/100м}^2 .$$

На втором шаге в уравнение второй целевой функции подставляют найденные координаты оптимума и получают максимальное значение второго критерия: $y_2 = 91,20 \%$.

Экспериментально установлено, что отмочно-зольные процессы, проведенные при температуре $28 \text{ }^\circ\text{C}$ со сниженной концентрацией карбоната натрия в технологическом растворе для отмока и сниженными концентрациями гидроксида кальция и сульфида натрия в отработанном растворе позволяют уменьшить содержание химических реагентов в полуфабрикate и увеличить выход площади кожи на 3,5 %. Наилучшие показатели, по сравнению с ранее используемыми технологиями, достигаются при расходах Na_2CO_3 , $\text{Ca}(\text{OH})_2$ и Na_2S соответственно 4-5, 6-8 и 6-9 г/дм³.

Таким образом, результаты, полученные с использованием метода главного критерия, подтверждаются только для четвертого фактора – температуры.

Метод приоритетов [1] предусматривает ранжирование k частных целевых функций в порядке их важности:

минимизировать $f_1(\bar{x}) = r_1$ (наивысший приоритет), ...,

минимизировать $f_k(\bar{x}) = r_k$ (самый низкий приоритет).

Если окажется, что по первому критерию возможно несколько оптимальных решений, то на втором шаге продолжают поиск минимума по второму критерию среди найденных решений.

Процесс поиска продолжается до тех пор, пока не останется одно решение. Таким образом, решение задачи с целевой функцией, имеющей более низкий приоритет, может влиять на окончательное решение, но не ухудшает полученные ранее решения задач, имеющих более высокий приоритет.

В рассматриваемом примере на первом шаге минимизировали показатель u_1 , а затем находили количество одинаковых оптимальных решений: из 1075080 возможных значений u_1 найдено 84321 совпадений. Одинаковыми приняты значения u_1 , для которых модуль разности между текущим и минимальным значением не превышал заданной точности ε .

На втором шаге формируют матрицу факторов, в которую включают координаты, соответствующие найденным совпадающим значениям u_1 . Количество строк данной матрицы равно количеству совпадений, а количество столбцов – количеству факторов. Если совпадений не зафиксировано, то метод приоритетов фактически сводится к методу главного критерия. В качестве координат оптимума принимают значения x_1, \dots, x_n (n – количество факторов), соответствующие u_1^{\min} , подставляют их в уравнения (6) и считают расчет окончанным. Иначе переходят к следующему шагу.

На третьем шаге для каждой строки матрицы факторов рассчитывают значение второй целевой функции y_2 и находят среди них минимальное значение. В качестве координат оптимума принимают значения x_1, \dots, x_n , соответствующие y_2^{\min} . Если показателей качества больше двух, шаги 2 и 3 повторяют до тех пор, пока не будут найдены значения всех целевых функций.

Для рассматриваемого примера получены следующие результаты:

$$x_1 = 7,8 \text{ г/дм}^3; x_2 = 12 \text{ г/дм}^3; x_3 = 13 \text{ г/дм}^3; x_4 = 32 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$y_1 = 630,0 \text{ кг/100м}^2, y_2 = 84,99 \text{ } \%$$

Таким образом, полученные результаты не соответствуют оптимальным значениям, подтвержденным экспериментально ни по одному из показателей.

В методе уступок [1, 4] k частных целевых функций ранжируются в порядке убывания их относительной важности, как и в предыдущем методе. Вначале оптимизируют первый, наиболее важный критерий. Затем с учетом технологических требований назначают величину допустимого отклонения значения этого критерия – так называемую уступку – и оптимизируют второй критерий при условии, что значение первого критерия не должно отличаться от оптимального более чем на величину установленного отклонения. Далее аналогичным образом оптимизируются все последующие критерии. Оптимальным считается значение вектора (1), полученное в результате отыскания условного оптимума последнего по важности критерия.

Рассмотрим алгоритм метода на примере модели (6), (9): на первом шаге минимизируют показатель y_1 и рассчитывают пределы допустимого отклонения первого целевой функции. В данном примере величина уступки принята равной 2ε :

$$y_{1B} = y_1^{\min} + 2\varepsilon, y_{1H} = y_1^{\min} - 2\varepsilon,$$

где y_{1B} y_{1H} – верхняя и нижняя границы допустимого отклонения; y_1^{\min} – оптимальное значение первого критерия; ε – заданная точность.

Если значения $y_{1В}$ $y_{1Н}$ превышают граничные, установленные для этого показателя, то принимают $y_{1В} = b$ и/или $y_{1Н} = a$, где a и b – диапазон изменения критерия y_1 .

На втором шаге оптимизируют второй критерий при условии, что значение первого не выходит за границы отрезка $[y_{1В}; y_{1Н}]$. Если целевых функций больше двух, рассчитывают величину уступки для второго показателя качества, шаг 2 повторяют для третьего критерия и т.д.

Результаты расчета для рассматриваемого примера:

$$x_1 = 3,4 \text{ г/дм}^3; x_2 = 8 \text{ г/дм}^3; x_3 = 9,4 \text{ г/дм}^3; x_4 = 28,2 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$y_1 = 630,0 \text{ кг/100м}^2, y_2 = 82,50 \text{ } \%$$

Таким образом, результаты оптимизации, полученные с использованием метода уступок, наиболее близки к экспериментальным данным.

5. Апробация результатов исследований

С целью анализа результатов оптимизации для всех моделей, приведенных в табл. 1, разработан программный модуль в среде VBA (Visual Basic for Application), реализующий рассмотренные методы. Исходные данные пользователь размещает на листе MS Excel, как показано на рис. 1, после чего может запустить расчет одного из методов. Граничные значения откликов и коэффициенты соответствующих уравнений следует расположить в порядке убывания их важности. В данном примере все показатели качества максимизируют.

Формирование лакового покрытия										
	Границы	нач	кон	h		Фактор	n=	3		
	x1	150	300	1		Отклик	k=	4		
	x2	5	15	0,2						
	x3	20	60	0,5						
	y1	290	384,2	0,1	max					
	y2	53	76,65	0,1	max					
	y3	180	351,6	0,1	max					
	y4	6,2	15	0,1	max					
Коэффициенты										
при										
a0	x1	x2	x3	x1*x2	x1*x3	x2*x3	x1^2	x2^2	x3^2	
349,4	-45,84	-14,91	43,85	13,75	0	0	-43,01	-18,32	-28,9	
72,33	-4,51	-3,87	5,06	0	0	0	-4,26	-7,44	-3,21	
313,9	-6,49	50,57	22,77	0	14,38	6,88	-12,01	-22,59	-25,24	
10,48	0	-0,642	-0,366	0	0	0	0	0,35	0	

Рис. 1. Размещение исходных данных листе MS Excel

Результаты расчетов по методу главного критерия для исследуемых моделей показали, что в некоторых случаях расчетные значения показателей не принадлежат допустимой области (табл. 4). Например, в математической модели процесса 2.2 (а) показатель качества $y_4 = 10,8$ МПа (предел прочности при растягивании) выходит за границы [11;15], т.е. нарушаются ограничения для четвертого критерия. Очевидно, что цели низших уровней не повлияли на решение, поэтому координаты оптимума, найденные для первого критерия, не являются допустимыми для показателя y_4 . В таком случае следует вернуться к решению, найденному для главного критерия, и выбрать координаты оптимума, удовлетворяющие ограничениям по всем целевым функциям.

Таблица 4

Результаты оптимизации исследуемых процессов по методу главного критерия

Номер процесса	Координаты оптимума				Значения целевых функций				
	x1	x2	x3	x4	y1	y2	y3	y4	y5

1.1.	7,4	10,2	12,4	28	630,00	91,20			
1.2.	0,74	1,37	12,8		6,44	23,08	37,96		
2.1.	1,1	30,2	0,8		99,29	103,43	229,36	-5,07	
2.2.	1,4	4,8	3,65		81,04	0,16	0,21	14,53	40,44
3.1.	182	7	59		384,20	75,07	262,30	1,21	
3.2.	26,2	10,4	1,95		250,10	337,98	22,90		

Таким образом, метод главного критерия можно рекомендовать в случае, если первый критерий намного важнее всех остальных. Поэтому использование данного метода для модели процесса 3. 1, в которой по мнению экспертов все критерии равнозначны [6], нецелесообразно. Однако метод можно использовать для исследования чувствительности оптимума путем ротации приоритетов: если имеется k уровней приоритета, то имеется $k!$ вариантов их ротации.

С целью исследования чувствительности оптимума для модели процесса 3.1 проведен отдельный вычислительный эксперимент, в котором все критерии поочередно располагались на первом месте. Результаты расчетов, представленные на рис. 2, показывают, что координаты оптимума, а также оптимальные значения целевых функций могут отличаться значительно.

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
$y_1-y_2-y_3-y_4$	182	7	59	384,1998	75,069	262,2972	1,2115
$y_2-y_3-y_4-y_1$	185	8,6	56	382,9899	76,0175	292,4003	0,9624
$y_3-y_4-y_1-y_2$	233	15	52,5	328,3749	62,39906	350,6816	0,52725
$y_4-y_1-y_2-y_3$	300	5	20	170,64	51,72	166,73	9,758

Рис. 2. Результаты исследования чувствительности оптимума

Если сравнивать результаты оптимизации со значениями, полученными экспериментально, то чем меньше показателей качества, тем ближе расчетные значения к экспериментальным, а при увеличении количества целевых функций

до 4-5 значения критериев, расположенные на последних местах, могут выходить за установленные границы.

Следует также принять во внимание, что довольно сложно определить ограничения по показателям качества y_2, \dots, y_k . В данной работе исследовались модели, для которых оптимальные диапазоны изменения факторов и откликов определены экспериментально [6–10], однако при разработке новых технологий количество экспериментов возрастет.

Устранить некоторые недостатки данного метода позволяет метод приоритетов (лексикографического упорядочивания критериев).

Вызов соответствующего расчетного модуля и размещение исходных данных аналогичны методу главного критерия. Результаты оптимизации исследуемых физико-химических процессов по методу уступок приведены в табл. 5. В отличие от метода главного критерия, значения показателей качества для всех моделей находятся в диапазонах, установленных экспериментально. Для некоторых моделей количество этапов может быть сокращено, как только встретится единственное решение.

Таблица 5

Результаты оптимизации исследуемых процессов по методу приоритетов

Номер процесса	Координаты оптимума				Значения целевых функций				
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1.1.	7,80	12,0	13,0	32	630,0002	84,99			
1.2.	0,84	1,37	16,0		6,440241	25,27	40,071		
2.1.	1,20	41,8	0,80		99,2937	104,86	231,72	-6,503	
2.3.	1,40	4,80	3,65		81,04009	0,156	0,2018	14,475	40,39
3.1.	215	8,40	56,0		384,1998	75,326	290,80	10,446	
3.3.	35	11,2	1,95		250,0962	324,94	23,663		
3.4.	250	9,50	0,75		303,7498	65,49	164,83	139,93	

Сравнивая результаты оптимизации, полученные разными методами, можно отметить, что в некоторых случаях значения координат оптимума и целевых функций совпадают (рис. 3, а), а в некоторых случаях могут существенно отличаться (рис. 3, б).

Если сравнивать результаты расчетов с оптимальными значениями, полученными экспериментально, то количество результатов, близких к экспериментальным, возросло до четырех. Отметим также, что по сравнению с предыдущим методом, размещение целевой функции на последнем месте не ухудшает результат по этому критерию.

Исследование чувствительности оптимума для математической модели процесса 3.1 дало результаты, аналогичные методу главного критерия. Отсюда следует, что использование метода приоритетов в случае равенства весов критериев не рекомендуется.

	x1	x2	x3	y1	y2	y3	y4	y5
МГК	1,4	4,8	3,65	81,04009	0,15873	0,21266	14,5339	40,4415
МП	1,4	4,8	3,65	81,04009	0,15596	0,20182	14,4749	40,3916

а

	x1	x2	x3	y1	y2	y3	y4
МГК	182	7	59	384,1998	75,069	262,297	10,6435
МП	215	8,4	56,00	384,1998	75,3256	290,803	10,4454

б

Рис. 3. Результаты оптимизации методами главного критерия (МГК) и приоритетов (МП): а - для модели процесса 2.2; б - для модели процесса 3.1

Вычислительные эксперименты по методу приоритетов заняли больше времени, чем в методе главного критерия. Субъективность ранжирования критериев и сложность определения ограничений сужают область использования данного метода.

Методы многокритериальной оптимизации с приоритетами часто критикуют за то, что высшие уровни приоритета не терпят компромиссов с нижними уровнями [2]. Одна из возможностей повысить гибкость метода - использовать метод уступок [2, 4].

Анализ результатов оптимизации по методу уступок проводился с помощью соответствующего программного модуля (табл. 6).

Таблица 6

Результаты оптимизации исследуемых процессов по методу уступок

Номер процесса	Координаты оптимума				Значения целевых функций				
	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1.1.	3,40	8,8	12,4	32	630,00	82,50			
1.2.	0,54	0,97	8,40		6,4402	14,09	12,433		
2.1.	1,30	33,6	0,60		99,294	108,9	247,99	-3,504	
2.3.	1,10	4,80	3,25		81,040	0,3089	0,331	14,99	47,63
3.1.	300	5,00	20,00		384,19	76,02	350,68	11,84	
3.3.	39,8	15,0	0,00		250,09	343,59	28,141		
3.4.	218	2,20	0,75		303,74	76,596	177,5	144,26	

Сравнительный анализ результатов оптимизации по трем методам показал, что координаты оптимума могут как совпадать, так и отличаться, в зависимости от вида модели, причем в случае регрессионных моделей результаты отличаются чаще. Изменение порядка критериев для модели 3.1 показало, что несмотря на различные координаты оптимума, значения целевых функций совпадают и близки к экспериментальным.

Наиболее близко к оптимальным значениям, полученным экспериментально, находятся результаты, полученные по методу уступок. Однако следует отметить, что обоснование величин уступок для инновационных технологий вызывает определенные трудности.

К недостаткам данного метода можно отнести относительно длительное время выполнения расчетов.

Таким образом, все рассмотренные методы предполагают ранжирование критериев, что предопределяет субъективность полученных решений. При использовании методов главного критерия и уступок возникают сложности в практическом определении диапазонов изменений значений целевых функций, что затрудняет применение методов для разработки инновационных технологий. Наиболее простым с точки зрения программной реализации является метод уступок; в то же время он наиболее длительный. Наименьшее время расчетов – в методе главного критерия, поскольку основное время затрачивается на решение лишь одной – главной – задачи оптимизации. Координаты оптимума, наиболее близкие к экспериментальным, получены по методу уступок.

6. Выводы

Сравнительная оценка эффективности трех вычислительных схем получения компромиссного решения выполнена для шести моделей, описывающих основные физико-химические процессы формирования кожевенных и меховых материалов различного назначения. Математические модели представлены наиболее часто используемыми типами уравнений.

Установлено, что метод главного критерия позволяет получить корректные результаты в случае существенного преобладания одного из критериев над остальными. Применение метода ограничено известными технологиями вследствие сложности обоснования ограничений для нижестоящих критериев. При увеличении количества целевых функций качество решения ухудшается, поскольку цели нижних уровней не влияют на результат. В методе приоритетов цели нижних уровней учитываются, однако не оказывают прямого влияния на результат. Метод уступок является наиболее гибким и позволяет учесть технологические особенности производства

материалов из кожи и меха; данный метод может быть рекомендован при разработке новых технологий.

Выполнена программная реализация методов главного критерия, приоритетов и уступок, и разработанный программный модуль включен в пакет прикладных программ COTSolution, разработанных на кафедре кибернетики химико-технологических процессов НТУУ «КПИ». Полученные результаты могут быть использованы для усовершенствования существующих и разработки инновационных технологий.

Литература

1. Taha, Hamdy A. Operations Research: An Introduction (8th Edition) [Text] / Hamdy A. Taha. – Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2007. – 819 p.
2. Steuer, R. E. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application [Text] / R. E. Steuer. – New York: John Wiley, 1986. – 546 p.
3. Островский, Г. М. Оптимизация химико-технологических процессов. Теория и практика [Текст] / Г. М. Островский, Т. А. Бережинский. – М. : Химия, 1984. – 240 с.
4. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс ; перевод с англ. [Текст] / Б. Банди. – М. : Радио и связь, 1988. – 129 с.
5. Данилкович, А. Г. Использование метода Бокса в задачах многокритериальной оптимизации [Текст] / А. Г. Данилкович, С. В. Брановицкая, С. Г. Бондаренко, О. В. Сангинова // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2013. – № 3/4 (63). – С. 4-8.
6. Екологічно орієнтовані технології виробництва шкіряних та хутрових матеріалів для створення конкурентоспроможних товарів [у 2 ч.] : монографія, Ч. I [Текст] / А. Г. Данилкович, В. І. Ліщук, В. П. Плаван, Е. Є. Касьян, О. Г. Жигоцький ; за ред. А. Г. Данилковича. – К. : Фенікс, 2011. – 437, [3] с.
7. Інноваційні технології виробництва шкіряних і хутрових матеріалів та виробів : монографія [Текст] / А. Г. Данилкович, І. М. Грищенко, В. І. Ліщук [та ін.] ; за ред. А. Г. Данилковича. – К. : Фенікс, 2012. – 344 с.

8. Данилкович, А. Г. Основи наукових досліджень у вищому навчальному закладі [Текст] / Данилкович А. Г. – К. : КНУТД, 2010. – 296 с.

9. Ліщук В. І. Використання багатокритеріальної оптимізації для пошуку компромісної області процесу зоління [Текст] / В. І. Ліщук, Т. Г. Войцеховська, А. Г. Данилкович // Легка промисловість. – 2007. – № 1. – С. 37-39.

10. Данилкович, А. Г. Підвищення якості вторинного покриття шляхом оптимізації покривної композиції [Текст] / А. Г. Данилкович, А. С. Браїлко, Н. В. Омельченко // Вісник ХНУ. – 2010. – № 3. – С. 129-134.

References

1. Taha, Hamdy A. (2007). Operations Research: An Introduction (8th Edition). Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 819.

2. Steuer, R. E. (1986). Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application. New York: John Wiley, 546.

3. Ostrovsky, G. M., Berezhinsky, T. A. (1984). Optimization of chemical processes. Theory and practice. Chemistry, 240.

4. Bundy, B. (1988). Methods of optimization. Introductory course [Text] Translated from English. Radio and Communications, 129.

5. Danilkovich, A.G., Branovitskaja, S.V., Bondarenko, S.G., Sanginova O.V. (2013). Application of Box Method for Multi-objective Optimization. Eastern-European Journal of enterprise technologies, 3/4 (63), 4–8.

6. Danylkovych, A. G., Lishchuk, V. I., Plavan, V. P., Kasian E. E., Zhyhotskyu, O. H. (2011). Environmentally oriented technology of leather and fur materials to create competitive products [in Part 2]: monograph, Part I. Phoenix, 437, [3].

7. Danylkovych, A. G., Gryschenko, I. M., Lishchuk, V.I. [et al.] (2012). Innovative technology of leather and fur materials and products: monograph. Phoenix, 344.

8. Danilkovich, A. G. (2010). Basic scientific research in higher education. KNUTD, 296.

9. Lishchuk, V.I. Voitsekhovska, T.G., Danylkovych, A.G. (2007). Use of multi-objective optimization to find a compromise area ashing process. Light Industry, 1, 37-39.

10. Danylkovych, A. G, Brayilko, A., Omelchenko, N. (2010). Improving the quality of secondary coverage by optimizing the coating composition / A.G. Danylkovych, / Bulletin of KNU, 3, 129-134.