

І.К. МАЦАККиївський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
email: *i.m.k@ukr.net*.**С.М. КРАСНИТСЬКИЙ**Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна,
e-mail: *krasnits.sm@ukr.net*.**АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ
ДОВЖИНИ ЧЕРГИ ТА ЧАСУ ОЧІКУВАННЯ В СИСТЕМАХ $M|G|1$ та $GI|M|1$**

Анотація. Досліджено асимптотичну поведінку майже напевне екстремальних значень довжини черги та часу очікування в черзі для систем масового обслуговування. Насамперед розглянуто одну загальну граничну теорему про асимптотику екстремальних значень регенерувальних процесів. Далі на основі цієї теореми для систем $M|G|1$ та $GI|M|1$ сформульовано закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$, а також деякі їхні уточнення.

Ключові слова: системи масового обслуговування $M|G|1$, $GI|M|1$, екстремальні значення, асимптотична поведінка майже напевне.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянуто одноканальну систему масового обслуговування (СМО), до якої в моменти $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ надходять заявки на обслуговування. Нехай $\tau_i = t_{i+1} - t_i, i \geq 0$, — проміжок часу між прибуттям двох сусідніх заявок, $\eta_i, i \geq 0$, — час обслуговування i -ї заявки. Припустимо, що $\tau_i, \eta_i, i \geq 0$, — послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.), $E\tau_i = a < \infty, E\eta_i = b < \infty$ ($i=1,2,\dots$).

Позначимо W_i час очікування i -ї заявки до початку обслуговування. За довжину черги тут і далі береться загальна кількість заявок, які перебувають на обслуговуванні або очікують на нього. Позначимо $Q(t)$ довжину черги в момент часу t . Час очікування W_i та довжина черги $Q(t)$ — це дві основні характеристики, які звичайно досліджуються в теорії масового обслуговування. Перші дослідження щодо властивостей величин W_i та $Q(t)$ з'явилися на початку ХХ століття. Вони пов'язані з іменами А. Erlang, F. Pollaczek, А. Khintchin [1, 2].

Покладемо

$$\bar{Q}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} Q(s), \bar{W}_n = \max_{0 \leq i < n} W_i.$$

Вочевидь, що дослідження екстремальних значень $\bar{W}_n$ та $\bar{Q}(t)$ також стануть значний інтерес для практичних застосувань. Тому величини $\bar{W}_n$ та $\bar{Q}(t)$ досліджувались в багатьох роботах (див., наприклад, [3–7] та огляд [8]). Зазвичай у таких дослідженнях використовували класичну теорію екстремальних значень н.о.р.в.в. [9, 10], а на випадкові величини τ_i та η_i накладалась умова

$$\rho = \frac{b}{a} < 1. \quad (1)$$

Зазначимо, що в цих роботах здебільшого розглядалась слабка збіжність нормованих випадкових величин $\bar{W}_n$ та $\bar{Q}(t)$. Мабуть, вперше для екстремальних значень випадкових величин, «хвости» розподілів яких наближені до «хвостів» експоненційного розподілу, закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$ були сформульовані в роботі [11].

У випадку екстремальних значень довжини черги $\bar{Q}(t)$ ці закони були отримані у праці [12]. Інакше кажучи, для системи $M|M|1$ (тобто коли випадкові величини τ_i і η_i мають експоненційний розподіл з параметрами $\lambda = 1/a$ та $\mu = 1/b$ відповідно) за умови (1) майже напевне (м.н.) виконуються такі асимптотичні співвідношення:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{Q}(t) \ln \frac{1}{\rho} - \ln t}{L_2(t)} = 1 \quad \text{м.н.}, \quad (2)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{Q}(t) \ln \frac{1}{\rho} - \ln t}{L_3(t)} = -1 \quad \text{м.н.} \quad (3)$$

Тут і далі для досить великих $t > 0$

$$L_0(t) = t, \quad L_1(t) = \ln t, \dots, \quad L_m(t) = \ln L_{m-1}(t), \dots, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Схожий результат для СМО $M|M|1$ за умови (1) має місце і для величин $\bar{W}_n$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(1-\rho)\bar{W}_n - \ln n}{L_2(n)} = 1 \quad \text{м.н.}, \quad (4)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(1-\rho)\bar{W}_n - \ln n}{L_3(n)} = -1 \quad \text{м.н.} \quad (5)$$

(див. [13]).

У цій роботі рівності (2)–(5) ми дещо посилюємо і поширюємо на більш загальний випадок систем $M|G|1$ і $GI|M|1$ (див. [1, 2]). Ця стаття має таку структуру. Основні теореми про асимптотику екстремальних значень довжини черги та часу очікування в черзі для систем $M|G|1$ та $GI|M|1$ сформульовано у розд. 3 та 4. Доведення цих теорем ґрунтуються на одній загальній граничній теоремі для екстремальних значень регенерувальних процесів, яка наведена у розд. 2.

2. АСИМПТОТИКА ЕКСТРЕМУМІВ РЕГЕНЕРУВАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ

Почнемо із означення регенерувального випадкового процесу (р.в.п.) (див., наприклад, [14, розд. 11, § 8; 15]).

За цикл тривалості T вважатимемо впорядковану пару $\mathcal{L} = (T, \xi(t))$, де T — невід’ємна випадкова величина, а $\xi(t)$ — випадковий процес, визначений на $[0, T]$:

$$P(T=0) < 1, \quad P(T < \infty) = 1.$$

Випадкова величина T і процес $\xi(t)$ в загальному випадку взаємозалежні. Припустимо, що $\mathcal{L}_k \stackrel{\text{def}}{=} (T_k, \xi_k(t))$, $k \geq 1$, — нескінченна послідовність незалежних циклів, однаково розподілених з циклом $\mathcal{L} = (T, \xi(t))$. Визначимо випадковий процес $X(t)$, $t \geq 0$, за формулою

$$X(t) = \xi_k(t - S_{k-1}) \quad \text{для } t \in [S_{k-1}, S_k),$$

де $S_k = T_1 + \dots + T_k$, $k \geq 1$, $S_0 = 0$. Тоді будемо називати процес $X(t)$ регенерувальним, точки S_k — моментами регенерації, а проміжок $[S_{k-1}, S_k)$ — k -м періодом регенерації.

На випадковий процес $\xi_i(t)$ накладатимемо умову сепарабельності. Тоді можна розглянути такі величини:

$$\bar{X}(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} X(s), \quad t \geq 0,$$

$$\bar{X}_k = \sup_{S_{k-1} \leq s < S_k} X(s), \quad k = 1, 2, \dots$$

Припустимо, що $\bar{X}_k$ м.н. є скінченною випадковою величиною. Покладемо

$$M_T = \mathbf{E}T, \quad q(u) = P(\bar{X}_k \geq u).$$

Тут ми розглядатимемо тільки випадок регенерувального процесу $X(t)$, який приймає дискретні значення, а саме задовольняє умову

$$P(X(t) \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}) = 1, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

і для $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ покладемо

$$R(n) = -\ln P(\bar{X}(T_1) \geq n).$$

Нехай $r(n) = R(n) - R(n-1)$. Визначимо розширення послідовності $(r(n))$ до функції $r: (0, \infty) \rightarrow R$:

$$r(x) = r(\lceil x \rceil), \quad (7)$$

де $\lceil x \rceil$ — найменше ціле, яке більше або дорівнює x . Нехай

$$R(x) = \int_0^x r(y) dy. \quad (8)$$

Функція R — це кусково-лінійне розширення послідовності $(R(n))$. Далі на функцію $r(x)$ накладемо умову:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{r(tx)}{r(t)} = x^\vartheta, \quad \vartheta > -1. \quad (9)$$

Фактично умова (9) визначає, що функції $r(x)$ та $R(x)$ регулярно змінюються на нескінченності [16].

Уведемо також такі позначення:

$$\alpha_m(t) = \sum_{i=1}^m L_i(t), \quad a_m(t) = R^{-1}(\alpha_m(t)),$$

$$d(t) = R^{-1}(L_1(t) - L_3(t)), \quad R^{-1}(y) = \inf\{x \in R: R(x) \geq y\}, \quad y \in R.$$

Теорема 1 [13]. Нехай $X(t)_{t \geq 0}$ — регенерувальний випадковий процес з дискретними значеннями, тобто задовольняє умову (6), $M_T < \infty$, m — фіксоване ціле число, $m \geq 1$. Нехай також функції $r(x)$ та $R(x)$ задаються формулами (7) та (8) відповідно і виконується умова (9). Тоді

$$P \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{r(a_1(t)) \left(\bar{X}(t) + \theta(t) - a_m \left(\frac{t}{M_T} \right) \right)}{L_{m+1}(t)} = 1 \right) = 1, \quad (10)$$

$$P \left(\liminf_{t \rightarrow \infty} r(a_1(t)) \left(\bar{X}(t) + \theta(t) - d \left(\frac{t}{M_t} \right) \right) = 0 \right) = 1, \quad (11)$$

де $\theta(t)$ — деяка випадкова величина, $0 \leq \theta(t) \leq 1$.

Рівність (10) одержано в роботі [13] (теорема 23), а рівність (11) випливає із зауваження 2 тієї ж роботи.

Наслідок 1. Якщо за умов теореми 1 $R(n) = \gamma n + C_0 + o(1)$ для $n \rightarrow \infty$, то

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma \bar{X}(t) - \alpha_m(t)}{L_{m+1}(t)} = 1\right) = 1, \quad (12)$$

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\gamma \bar{X}(t) - \left(L_1\left(\frac{t}{M_T}\right) - L_3\left(\frac{t}{M_T}\right) - C_0 \right) \right) = \kappa \right) = 1, \quad (13)$$

де κ — деяка не випадкова константа, $\kappa \in [-\gamma, 0]$. Тут і далі $\kappa, \gamma, C, C_0, C_1, \dots$ позначаємо константи (не обов'язково однакові для різних випадків).

Доведення рівності (12) безпосередньо випливає із рівності (10). Звісно, в умовах наслідку 1 маємо

$$r(t) = \gamma + o(1),$$

а отже виконується умова (9) для $\vartheta = 0$. Оскільки функція $R(t)$ — це кусково-лінійне розширення послідовності $(R(n))$, то вона неперервна, монотонно зростає і задовольняє рівність $R(t) = \gamma t + C_0 + o(1)$. Тоді

$$a_m(t) = R^{-1}(\alpha_m(t)) = \frac{\alpha_m(t) - C_0 + o(1)}{\gamma}.$$

З останніх рівностей та (10) безпосередньо випливає (12). Так само одержуємо

$$d(t) = R^{-1}(L_1(t) - L_3(t)) = \frac{L_1(t) - L_3(t) - C_0 + o(1)}{\gamma}.$$

Підстановка цього виразу у рівність (11) і визначає (13).

3. СИСТЕМА МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ $M|G|1$

Розглянемо одноканальну СМО, до якої надходить пуасонівський потік заявок з інтенсивністю $\lambda = 1/a$, а час обслуговування має довільний розподіл $P(\eta < x) = G(x)$. Припустимо, що $\mathbf{E}\eta = b < \infty$ і виконується умова (1). Далі будемо досліджувати класичну СМО типу $M|G|1$ (див. [1, 2]). Для спрощення запису вважатимемо, що в момент $S_0 = 0$ в порожню систему $M|G|1$ надходить заявка, а S_1 — це момент надходження нової заявки після першого періоду зайнятості. Відповідно S_k — це момент надходження нової заявки після k -го періоду зайнятості. Тоді $Q(t)$ буде регенерувальним процесом з моментами регенерації $S_0 = 0, S_1, S_2, \dots$. Втім для тривалості k -го періоду регенерації T_k маємо

$$M_T = \mathbf{E}T_k = E(S_k - S_{k-1}) = \frac{1}{\lambda} + \frac{b}{1 - \lambda b} = \frac{1}{(1 - \rho)\lambda}. \quad (14)$$

Зазначимо, що $\mathbf{E}\tau_k = \frac{1}{\lambda}$, відповідно $\frac{b}{1 - \lambda b}$ — це середня тривалість періоду зайнятості (див. [17, гл. 14, § 8, задача 16]).

Нехай $q(u) = P(\bar{Q}(T_1) \geq u)$ — ймовірність перевищення рівня u процесом $Q(t)$ на одному циклі регенерації.

Будемо вважати, що u приймає цілі додатні значення. Щоб знайти асимптотику величини $q(u)$ на момент обслуговування заявки η , накладемо такі умови:

$$\exists s_0, 0 < s_0 \leq \infty, \text{ таке, що для } 0 < s < s_0 \text{ } \mathbf{E} \exp(s\eta) < \infty, \quad (15)$$

$$\mathbf{E} \exp(s\eta) \uparrow \infty \text{ для } s \uparrow s_0. \quad (16)$$

У роботі [18] показано, що за умов (15), (16) має місце така асимптотична формула: для $u \rightarrow \infty$

$$q(u) = (C_1 + o(1)) \exp(-\gamma_Q u), \quad (17)$$

де $\gamma_Q = \ln(1 + \frac{\beta}{\lambda})$, $\beta > 0$, — корінь рівняння

$$\mathbf{E} \exp(\beta \eta) = 1 + \frac{\beta}{\lambda}, \quad (18)$$

константа C_1 не залежить від u , $0 < C_1 < \infty$.

З наслідку 1 розд. 2 та рівності (17) маємо таке твердження.

Теорема 2. Нехай для СМО $M|G|1$ виконується умова (1), а тривалість обслуговування η задовольняє умови (15), (16). Тоді

$$P \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_Q \bar{Q}(t) - \alpha_m(t)}{L_{m+1}(t)} = 1 \right) = 1, \quad (19)$$

$$\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\gamma_Q \bar{Q}(t) - \left(L_1 \left(\frac{t}{M_T} \right) - L_3 \left(\frac{t}{M_T} \right) + C \right) \right) = \kappa \right) = 1, \quad (20)$$

де γ_Q визначене в рівностях (17), (18), $C = \ln C_1$, M_T задається формулою (14), κ — деяка не випадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_Q, 0]$.

Зауваження 1. Виходячи з простих міркувань, можна показати, що за умови (1) рівняння (18) має єдиний додатний корінь, який перебуває на інтервалі $(0, 2(1-p)/(\lambda a_2))$, $a_2 = \mathbf{E} \eta^2$.

Зауваження 2. В умовах і позначеннях теореми 2 виконується закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_Q \bar{Q}(t) - \ln t}{L_2(t)} = 1 \quad \text{м.н.}, \quad (21)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_Q \bar{Q}(t) - \ln t}{L_3(t)} = -1 \quad \text{м.н.} \quad (22)$$

Далі перейдемо до дослідження асимптотики величини $\bar{W}_n$ для системи $M|G|1$. Покажемо, що має місце така теорема.

Теорема 3. Нехай для СМО $M|G|1$ виконується умова (1), а час обслуговування η задовольняє умови (15), (16). Тоді

$$P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \alpha_m(n)}{L_{m+1}(n)} = 1 \right) = 1, \quad (23)$$

$$P \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\gamma_W \bar{W}(n) - \left(L_1 \left(\frac{n}{\lambda M_T} \right) - L_3 \left(\frac{n}{\lambda M_T} \right) + C \right) \right) = \kappa \right) = 1, \quad (24)$$

де $\gamma_W = \beta > 0$ — корінь рівняння (18), M_T задається формулою (14), κ — деяка не випадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$.

Зауваження 1. Константа C в рівності (24) може бути записана в явному вигляді (див. [8, теорема 4.1]). Але в загальному випадку реально обчислити її складно, бо вона визначається функцією розподілу величини першого перескоку через 0 деякого випадкового блукання, яка є невідомою. Те ж саме стосується константи C у рівності (20).

Доведення теореми 3. Нехай $(\xi_n = \eta_n - \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — послідовність н.о.р.в.в., де η_n — час обслуговування n -ї заявки, τ_n — проміжок часу між надходженням n -ї та $(n+1)$ -ї заявок. Відомо, що час очікування n -ї заявки в черзі W_n на обслуговування задовольняє важливу рекурентну рівність Lindley (див. [14, гл. 6, § 9]):

$$W_{n+1} = (W_n + \xi_n)_+, \quad (25)$$

де

$$x_+ = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Позначимо $\bar{W}_T$ максимальну тривалість часу очікування на одному циклі регенерації. Тоді із рівності (25), коли випадкова величина ξ_n має так звані легкі «хвости» у впливає таке асимптотичне співвідношення (див. [5, 8]):

для $x \rightarrow \infty$

$$P(\bar{W}_T \geq x) = (C_2 + o(1)) \exp(-\gamma_W x), \quad (26)$$

де γ_W — корінь рівняння

$$\mathbf{E} \exp(\gamma_W \xi_n) = 1, \quad (27)$$

константа C_2 не залежить від x , $0 < C_2 < \infty$.

Для розв'язання співвідношень (26), (27) достатньо таких умов [8]:

$$\exists s_0, 0 < s_0 \leq \infty, \text{ таке, що для } 0 < s < s_0 \quad \mathbf{E} \exp(s \xi_n) < \infty, \quad (28)$$

$$\text{для } s \uparrow s_0 \quad \mathbf{E} \exp(s \xi_n) \uparrow \infty. \quad (29)$$

Можна побачити, що коли в умовах теореми 3 випадкова величина η_n задовольняє умови (15), (16), то для випадкової величини ξ_n виконуються умови (28), (29). Дійсно, у випадку $s_0 = \infty$ маємо для $s \rightarrow \infty$

$$\mathbf{E} \exp(s \xi_n) = \mathbf{E} \exp(s \eta_n) \frac{\lambda}{\lambda + s} \geq (\mathbf{E} \exp(\eta_n))^s \frac{\lambda}{\lambda + s} \rightarrow \infty,$$

оскільки $\mathbf{E} \exp(\eta_n) > 1$. Так само розглядається випадок $s_0 < \infty$. Отже, в умовах теореми 3 визначається асимптотичне співвідношення (26), а рівняння (27) зводиться до рівняння (18), а саме $\gamma_W = \beta > 0$ — корінь рівняння (18).

Позначимо $N(t)$ лічильний процес для послідовності моментів регенерації (S_k) :

$$N(t) = \max(k \geq 0: S_k < t).$$

$$\text{Уведемо також випадкову величину } Y_k = \sup_{S_{k-1} \leq t_i < S_k} W_i, \quad \bar{Y}_n = \max_{1 \leq k \leq n} Y_k.$$

Зрозуміло, що величини Y_k однаково розподілені з $\bar{W}_T$ і у разі цілих чисел u має місце рівність

$$P([Y_k] \geq u) = P(\bar{W}_T \geq u) = (C_2 + o(1)) \exp(-\gamma_W u), \quad u \rightarrow \infty, \quad (30)$$

де $[x]$ — ціла частина x .

Застосовуючи наслідок 1 теореми 1 до послідовності н.о.р.в.в. $([Y_k])$, отримуємо

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_W [\bar{Y}_n] - \alpha_m(n)}{L_{m+1}(n)} = 1\right) = 1, \quad (31)$$

$$P\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (\gamma_W [\bar{Y}_n] - (L_1(n) - L_3(n) + C)) = \kappa\right) = 1, \quad (32)$$

де $\gamma_W = \beta > 0$ — корінь рівняння (18), $C = \ln C_2$, κ — деяка не випадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_W, 0]$.

Далі визначимо перехід від (31), (32) до рівностей (23), (24). Оскільки $\bar{Y}_n = [\bar{Y}_n] + \theta_n$, $0 \leq \theta_n \leq 1$, то рівності (31), (32) залишаться справедливими у разі заміни $[\bar{Y}_n]$ на $\bar{Y}_n$ (втім може дещо змінитися лише константа $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$). У теорії відновлення відомо, що для $t \rightarrow \infty$

$$\frac{N(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{M_T} \quad \text{м.н.}$$

А отже, для $n \rightarrow \infty$

$$\frac{N(t_n)}{n} = \frac{N(t_n)}{t_n} \cdot \frac{t_n}{n} \rightarrow \frac{1}{M_T} \cdot \frac{1}{\lambda} \quad \text{м.н.,}$$

$$\ln N(t_n) = \ln \frac{n}{\lambda M_T} + o(1) \quad \text{м.н.}$$

Якщо скористатися цими асимптотичними співвідношеннями і підставити в рівності (31), (32) $\bar{Y}_n$ замість $[\bar{Y}_n]$, а $N(t_n)$ — замість n , то отримаємо

$$P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_W [\bar{Y}_{N(t_n)}] - \alpha_m(n)}{L_{m+1}(n)} = 1 \right) = 1,$$

$$P \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\gamma_W [\bar{Y}_{N(t_n)}] - \left(L_1 \left(\frac{n}{\lambda M_T} \right) - L_3 \left(\frac{n}{\lambda M_T} \right) + C \right) \right) = \kappa \right) = 1,$$

де $\gamma_W = \beta > 0$ — корінь рівняння (18), M_T задається формулою (14), $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$ (схожі переходи можна знайти в [12, 13]).

Зрозуміло, що останні рівності справджуються і у разі заміни $\bar{Y}_{N(t_n)}$ на $\bar{Y}_{N(t_n)+1}$. Залишається відмітити, що

$$\bar{Y}_{N(t_n)} \leq \bar{W}(n) \leq \bar{Y}_{N(t_n)+1}.$$

Звідси випливає теорема 3.

Зауваження 2. В умовах і позначеннях теореми 3 має місце закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$:

$$P \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \ln n}{L_2(n)} = 1 \right) = 1, \quad (33)$$

$$P \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \ln n}{L_3(n)} = -1 \right) = 1. \quad (34)$$

Приклад 1. Нехай у випадку СМО $M|G|1$

$$\eta = d = \text{const} < \infty, \quad \rho = \lambda d < 1.$$

Тоді виконуються умови (15), (16) для $s_0 = \infty$, а отже виконуються рівності (19), (20) теореми 2, де $\gamma_Q = \ln(1 + \beta/\lambda)$, а β — корінь рівняння:

$$\exp(\beta d) = 1 + \frac{\beta}{\lambda}. \quad (35)$$

Так само справджуються рівності (23), (24) терми 3 у разі $\gamma_W = \beta$ для β , що визначене в (35).

Приклад 2. Нехай у випадку СМО $M|G|1$ випадкова величина η має розподіл Вейбулла:

$$P(\eta < x) = 1 - \exp(-x^\alpha), \quad x \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \rho = \lambda \mathbf{E} \eta = \lambda \Gamma(1 + 1/\alpha) < 1.$$

Так само, як і вище, виконуються умови (15), (16) для $s_0 = \infty$ і справджуються відповідні рівності теорем 2 та 3, де $\gamma_Q = \ln(1 + \beta/\lambda)$, $\gamma_W = \beta$, а β — корінь рівняння

$$\alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp(\beta x - x^\alpha) dx = 1 + \frac{\beta}{\lambda}.$$

4. СИСТЕМА МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ $GI|M|1$

СМО $GI|M|1$ — це одноканальна система масового обслуговування, до якої надходить рекурентний потік заявок, $t_0 = 0 < t_1 < t_2 \dots$ — моменти надходження заявок. Нехай $(\tau_k = t_k - t_{k-1})$ — послідовність н.о.р.в.в. з функцією розподілу $F(x)$, а час обслуговування η_k має експоненційний розподіл з параметром μ . Припустимо, що

$$\mathbf{E} \tau_k = a < \infty, \quad \rho = \frac{1}{a\mu} < 1,$$

тобто виконується умова (1).

Вкладений ланцюг Маркова (Q_n) визначається моментами (t_n) , а його стани — це довжина черги до надходження заявки, тобто

$$Q_n = Q(t_n - 0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Втім можна вважати, що ланцюг (Q_n) задається рекуррентною формулою

$$Q_n = (Q_{n-1} + 1 - v_n)_+, \quad (36)$$

де (v_n) — послідовність н.о.р.в.в., а $v_1 = v_1(\tau_1)$ — число потраплянь процесу Пуассона з параметром μ в інтервал $(0, \tau_1)$ (див. [7, гл. 3, § 6; 19, гл.1, § 8]).

Позначимо через

$$d_k^* = P(v_1 = k) = \int_0^\infty \frac{(\mu x)^k}{k!} \exp(-\mu x) dF(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (37)$$

ймовірність того, що на інтервалі довжиною τ виконується k обслуговувань,

$$f(s) = \sum_{k=0}^\infty d_k^* s^k.$$

Відомо [17, с. 477–478], що тоді існують стаціонарні ймовірності станів для (Q_n) :

$$P(Q_\infty = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Q_n = k) = p_k = (1 - \beta_0) \beta_0^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

де β_0 — єдиний розв'язок рівняння

$$f(\beta_0) = \beta_0, \quad \beta_0 < 0 < 1. \quad (39)$$

Уведемо моменти регенерації процесу $Q(t)$ так само, як і у розд. 3, тобто $S_0 = 0$, S_k — момент надходження нової заявки після k -го періоду зайнятості, $k = 1, 2, \dots$. Нехай T_k — тривалість k -го циклу регенерації. Для СМО $GI|M|1$ має місце формула

$$M_T = \mathbf{E} T_k = \frac{\alpha}{1 - \beta_0} \quad (40)$$

(див., наприклад, [18]). Отже, щоб скористатися результатами з розд. 2, потрібно знайти величину $q(u)$ — ймовірність досягнення процесом $Q(t)$ стану u на одному циклі регенерації. Покажемо, що

$$q(u) = P(\bar{Q}(T_1) \geq u) = (C_1 + o(1)) \exp(-\gamma_Q u), \quad (41)$$

де $\gamma_Q = \ln \frac{1}{\beta_0}$, β_0 — корінь рівняння (39), $0 < C_1 < \infty$, u — ціле додатне число, константа C_1 не залежить від u .

Покладемо $\xi_i = 1 - v_i$ і визначимо величини $U_n, \bar{U}_n, \bar{U}_\infty$ у такий спосіб:

$$U_0 = 0, \quad U_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad \bar{U}_n = \max_{0 \leq k \leq n} U_k, \quad \bar{U}_\infty = \max_{0 \leq k < \infty} U_k. \quad (42)$$

Якщо виконується умова (1), то

$$\mathbf{E} \xi_1 = 1 - \int_0^\infty \mathbf{E} v_1(x) dF(x) = 1 - \int_0^\infty \mu x dF(x) = 1 - \mu a < 0,$$

тому $U_n \rightarrow -\infty$, а отже $\bar{U}_\infty$ — м.н. обмежена випадкова величина.

Окрім того, згідно з (36) маємо

$$Q_n = \bar{U}_n, \quad Q_\infty = \bar{U}_\infty, \quad (43)$$

де випадкова величина Q_∞ відповідає стаціонарному розподілу для (Q_n) (тут ми скористаємося теоремою про еквівалентність випадкових величин M_n та W_n із [14, розд. 6, § 9]). Символ $\stackrel{d}{=}$ означає рівність за розподілом.

Рівності (43) та (38) задають

$$P(\bar{U}_\infty \geq k) = \beta_0^k = \exp(-\gamma_Q k), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (44)$$

де $\gamma_Q = \ln(1/\beta_0)$.

Нехай $0 = \min(n \geq 1: U_n \leq 0)$. Безпосередньо із (42) маємо

$$\bar{Q}(T_1) = \bar{U}_\theta + 1 \leq \bar{U}_\infty + 1. \quad (45)$$

Далі скористаємось таким зображенням:

$$\{\bar{U}_\infty \geq u\} \stackrel{d}{=} \{\bar{U}_\theta \geq u\} \cup \{U_\theta + \bar{U}'_\infty \geq u\},$$

втім можна вважати, що $\bar{U}_\infty$ та $\bar{U}'_\infty$ однаково розподілені, а $\bar{U}_\theta$ та $\bar{U}'_\infty$ є незалежними випадковими величинами. Це справджується, якщо покласти

$$U'_k = \sum_{\theta < i \leq k} \xi_i, \quad \bar{U}'_\infty = \max_{\theta < k < \infty} U'_k.$$

Звідси маємо

$$P(\bar{U}_\infty \geq u) = P(\bar{U}_\theta \geq u) + P_1(u) - P_2(u), \quad (46)$$

де

$$P_1(u) = P(U_\theta + \bar{U}'_\infty \geq u), \quad P_2(u) = P(U_\theta + \bar{U}'_\infty \geq u, \bar{U}_\theta \geq u).$$

Насамперед оцінимо зверху величину $P_2(u)$. Оскільки $U_\theta \leq 0$, то, враховуючи співвідношення (44), (45), отримаємо

$$P_2(u) \leq P(\bar{U}_\theta \geq u, \bar{U}'_\infty \geq u) = P(\bar{U}_\theta \geq u) P(\bar{U}'_\infty \geq u) \leq \exp(-2\gamma_Q u). \quad (47)$$

Перейдемо до оцінювання величини $P_1(u)$. Нехай

$$p_k = P(U_\theta = -k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді

$$\begin{aligned} P_1(u) &= P(U_\theta + \bar{U}'_\infty \geq u) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k P(\bar{U}'_\infty \geq u + k) = \exp(-\gamma_Q u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \exp(-\gamma_Q k). \end{aligned} \quad (48)$$

Розглядаючи разом співвідношення (44)–(48), одержуємо

$$\exp(-\gamma_Q u) = P(\bar{U}_\theta \geq u) + \exp(-\gamma_Q u) \sum_{k=0}^{\infty} p_k \exp(-\gamma_Q k) + O(\exp(-2\gamma_Q u)).$$

Звідси випливає таке асимптотичне співвідношення:

$$P(\bar{U}_\theta \geq u) = (C_2 + o(1)) \exp(-\gamma_Q u),$$

де $C_2 = \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 - \exp(-\gamma_Q k))$.

Отже, враховуючи співвідношення (45), отримаємо оцінку (41) з константою

$$C_1 = \exp(\gamma_Q) \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 - \exp(-\gamma_Q k)).$$

Наступна теорема безпосередньо випливає з наслідку 1 розд. 2 та рівностей (40), (41).

Теорема 4. Нехай для СМО $GI|M|1$ виконується умова (1). Тоді

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma_Q \bar{Q}(t) - \alpha_m(t)}{L_{m+1}(t)} = 1\right) = 1, \quad (49)$$

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\gamma_Q \bar{Q}(t) - \left(L_1\left(\frac{t}{M_T}\right) - L_3\left(\frac{t}{M_T}\right) + C\right)\right) = \kappa\right) = 1, \quad (50)$$

де $\gamma_Q = \ln(1/\beta_0)$, β_0 — корінь рівняння (39), $\kappa \in [-\gamma_Q, 0]$ — не випадкова константа,

$$C = \ln C_1 = \gamma_Q + \ln\left(\sum_{k=1}^{\infty} p_k (1 - \exp(-\gamma_Q k))\right).$$

Далі розглянемо асимптотичну поведінку величини $\bar{W}(n)$ для випадку СМО $GI|M|1$. Щоб застосувати результати, отримані в розд. 2, потрібно довести, що випадкова величина $\bar{W}_T$ задовольняє асимптотичне співвідношення (26). Як і у випадку доведення теореми 3, покладемо $(\xi_n = \eta_n - \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ і виберемо $s_0 = \mu$. Тоді для $s \uparrow s_0 = \mu$ маємо

$$\mathbf{E} \exp(s \xi_n) = \mathbf{E} \exp(s \eta_n) \mathbf{E} \exp(-s \tau_n) = \frac{\mu}{\mu - s} \mathbf{E} \exp(-s \tau_n) \rightarrow \infty,$$

тобто виконуються умови (28), (29), а отже справджуються рівності (26), (27). Разом із тим рівняння (27) для СМО $GI|M|1$ запишемо так:

$$1 - \frac{\gamma_W}{\mu} = \mathbf{E} \exp(-\gamma_W \tau_n) = \int_0^{\infty} \exp(-\gamma_W x) dF(x). \quad (51)$$

Залишається застосувати наслідок 1 теореми 1, виходячи з міркувань, що наведені під час обґрунтування теореми 3. Отримаємо таку теорему.

Теорема 5. Нехай для СМО $GI|M|1$ виконується умова (1). Тоді

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_W \bar{W}(n) - \alpha_m(n)}{L_{m+1}(n)} = 1\right) = 1, \quad (52)$$

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \left(\gamma_Q \bar{W}(n) - \left(L_1\left(\frac{n}{\lambda M_T}\right) - L_3\left(\frac{t}{\lambda M_T}\right) + C\right)\right) = \kappa\right) = 1, \quad (53)$$

де γ_W — корінь рівняння (51), M_T задається формулою (40), κ — не випадкова константа, $\kappa \in [-\gamma_W, \gamma_W]$.

Зауваження 1. Для СМО $GI|M|1$ в умовах і позначеннях теорем 4 та 5 мають місце закони повторного логарифма для $\limsup$ та потрійного логарифма для $\liminf$, аналогічні наведеним у розд. 3.

Отже, у цій роботі досліджено асимптотику екстремальних значень довжин черги та часу очікування в черзі для систем $M|G|1$ та $GI|M|1$. Встановлено

закон повторного логарифма для $\limsup$ та закон потрійного логарифма для $\liminf$, а також деякі їхні посилення. На нашу думку, запропоновані підходи за додаткових умов можуть бути корисними і для випадку більш загальної СМО $GI|G|1$ та процесів типу Ліндлі (див. [7, гл. 3, § 6]).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. Introduction to queueing theory. Boston: Birkhauser, 1989. 315 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-9826-8>.
2. Riordan J. Stochastic service systems. New York: John Wiley, 1962. 184 p.
3. Cohen J.W. Extreme values distribution for the $M|G|1$ and $GI|M|1$ queueing systems. *Ann. Inst. H. Poincare. Sect. B.* 1968. Vol. 4. P. 83–98.
4. Anderson C.W. Extreme value theory for a class of discrete distribution with application to some stochastic processes. *Journal of Applied Probability.* 1970. Vol. 7. P. 99–113.
5. Iglehart D.L. Extreme values in the $GI/G/1$ queue. *Annals of Mathematical Statistics.* 1972. Vol. 43. P. 627–635.
6. Serfozo R.F. Extreme values of birth and death processes and queues. *Stochastic Processes and Their Applications.* 1988. Vol. 27. P. 291–306.
7. Asmussen S. Applied probability and queues. 2-nd. ed. New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2003. 439 p.
8. Asmussen S. Extreme values theory for queues via cycle maxima. *Extremes.* 1998. Vol. 1. P. 137–168.
9. Gnedenko B.V. Sur la distribution limit du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of Mathematics.* 1943. Vol. 44, N 3. P. 423–453.
10. Leadbetter M.R., Lindgren G., Rootzen H. Extremes and related properties of random sequences and processes. New York: Springer, 1983. 336 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5449-2>.
11. Glasserman P., Kou S.G. Limits of first passage times to rare sets in regenerative processes. *Anal. Appl. Probab.* 1995. Vol. 5. P. 424–445.
12. Довгай Б.В., Мацак І.К. Асимптотична поведінка екстремальних значень довжини черги в системах масового обслуговування $M|M|m$. *Кибернетика та системний аналіз.* 2019. Т. 55, № 2. С. 171–179.
13. Akbasha K.S., Matsak I.K. Asymptotic behavior of extreme values of random variables and some stochastic processes. In: *Stochastic Processes: Fundamentals and emerging applications*. M. Moklyachuk (ed.). Nova Science Publishers, Inc., Chapter 1, 2023. P. 1–35.
14. Feller W. An introduction to probability theory and its applications. Vol. 2. New York; London; Sydney; Toronto: John Wiley and Sons, 1968. 750 p.
15. Smith W.L. Renewal theory and its ramifications. *Journal of the Royal Statistical Society.* 1958. Vol. 20, N 2. P. 243–302.
16. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Cambridge University Press, 1989. 479 p.
17. Karlin S. A first course in stochastic processes. New York: Academic Press, 1968. 536 p.
18. Akbasha K.S., Doronina N.V., Matsak I.K. On extreme values of the queue length in some queueing systems. *Georgian Mathematical Journal.* 2024. Vol. 31, N 1. P. 1–16. <https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2055>.
19. Prabhu N.U. Stochastic storage processes. New York; Heidelberg; Berlin: Springer, 1980. 154 p.

I.K. Matsak, S.M. Krasnitskiy

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE EXTREME VALUES QUEUE LENGTHS AND WAITING TIME IN $M|G|1$ AND $GI|M|1$ SYSTEMS

Abstract. The asymptotic behavior of the almost certainly extreme values of the queue length and waiting time in the queue for mass service systems was studied. On- first of all, one general limit theorem on the asymptotics of extreme values of regenerative processes is considered. Further, applying this theorem to mass service systems $M|G|1$ and $GI|M|1$, the law of the repeated logarithm for $\limsup$ and the law of the triple logarithm for $\liminf$ are formulated, as well as some of their refinements.

Keywords: queueing systems $M|G|1$, $GI|M|1$, extreme values, asymptotic behaviour almost surely.

Надійшла до редакції 15.12.2023