

**Резанова Вікторія Георгіївна** кандидат технічних наук, доцент кафедри комп'ютерної інженерії та електромеханіки, Київський національний університет технологій та дизайну, м. Київ, <https://orcid.org/0000-0003-4630-2701>

## ІНТЕРПОЛЯЦІЯ: ДОСЛІДЖЕННЯ, АНАЛІЗ ЗАСТОСУВАННЯ, ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

**Анотація.** У статті розглядаються теоретичні та практичні аспекти застосування методів інтерполяції у задачах обробки дискретних даних, а також особливості їх вивчення студентами спеціальностей галузі комп'ютерних наук. Зростання обсягів інформації та широке використання комп'ютерного моделювання зумовлюють необхідність ефективного використання чисельних методів для аналізу та відновлення функціональних залежностей на основі експериментальних даних. Одним із найбільш поширених підходів до розв'язання таких задач є інтерполяція, яка дозволяє будувати математичні моделі функцій на основі заданих дискретних значень.

У статті детально розглянуто можливості використання інтерполяційних алгоритмів у різних областях науки і технологій, зокрема у задачах, пов'язаних із комп'ютерним моделюванням, аналізом даних та побудовою графічних моделей, а також у машинному навчанні та робототехніці.

У роботі проаналізовано основні методи поліноміальної інтерполяції, зокрема інтерполяційні поліноми Лагранжа, що широко використовуються у чисельному аналізі та комп'ютерних алгоритмах обробки даних. Розглянуто математичні основи побудови інтерполяційних функцій, особливості їх алгоритмічної реалізації та можливості використання у програмних середовищах. Особливу увагу приділено питанням інтеграції методів інтерполяції у навчальний процес підготовки студентів комп'ютерних наук, що дозволяє поєднати математичні знання з практичними навичками програмування та алгоритмічного мислення.

Показано, що використання програмних засобів під час вивчення чисельних методів сприяє підвищенню ефективності навчання, формуванню у студентів навичок розроблення алгоритмів та кращому розумінню математичних принципів інтерполяції.

Отримані результати можуть бути використані у навчальних курсах з чисельних методів, комп'ютерного моделювання та аналізу даних для підготовки майбутніх фахівців у галузі інформаційних технологій.

**Ключові слова:** інтерполяція, чисельні методи, поліном Лагранжа, програмна реалізація, чисельний аналіз.

**Rezanova Viktoriia Georhiivna** PhD in Engineering, Associate Professor of the Department of Computer Engineering and Electromechanics, Kyiv National University of Technologies and Design, Kyiv, <https://orcid.org/0000-0003-4630-2701>

## INTERPOLATION: RESEARCH, ANALYSIS OF APPLICATION, SOFTWARE IMPLEMENTATION

**Abstract.** The article considers theoretical and practical aspects of the application of interpolation methods in discrete data processing problems, as well as the features of their study by students of computer science specialties. The growth of information volumes and the widespread use of computer modeling necessitate the effective use of numerical methods for the analysis and restoration of functional dependencies based on experimental data. One of the most common approaches to solving such problems is interpolation, which allows building mathematical models of functions based on given discrete values.

The article examines in detail the possibilities of using interpolation algorithms in various fields of science and technology, in particular in tasks related to computer modeling, data analysis and graphical model building, as well as in machine learning and robotics.

The paper analyzes the main methods of polynomial interpolation, in particular Lagrange interpolation polynomials, which are widely used in numerical analysis and computer data processing algorithms. The mathematical foundations of the construction of interpolation functions, the features of their algorithmic implementation and the possibility of using them in software environments are considered. Special attention is paid to the issues of integrating interpolation methods into the educational process of training computer science students, which allows combining mathematical knowledge with practical programming skills and algorithmic thinking.

It is shown that the use of software tools when studying numerical methods contributes to increasing the efficiency of learning, developing students' skills in developing algorithms and a better understanding of the mathematical principles of interpolation.

The results obtained can be used in training courses on numerical methods, computer modeling and data analysis to train future specialists in the field of information technology. **Keywords:**

**Keywords:** interpolation, numerical methods, Lagrange polynomial, software implementation, numerical analysis

**Постановка проблеми.** У сучасних умовах розвитку інформаційних технологій значна кількість задач пов'язана з аналізом та обробкою великих обсягів даних. Часто інформація про досліджуваний процес представлена у вигляді дискретного набору значень, отриманих у результаті експериментів, вимірювань або комп'ютерного моделювання.

У багатьох прикладних задачах функція відома лише у скінченній кількості точок, отриманих експериментально або шляхом дискретизації. Водночас необхідно визначити її значення між вузлами або побудувати аналітичну модель досліджуваного процесу. Такі задачі виникають, зокрема, у комп'ютерному моделюванні фізичних процесів; у цифровій обробці сигналів; в комп'ютерній графіці; в геоінформаційних системах; в машинному навчанні.

Для розв'язання подібних задач застосовуються методи інтерполяції. Інтерполяція дозволяє побудувати функцію, яка проходить через задані точки, що дає можливість визначати значення функції у довільних точках інтервалу, що робить її фундаментальним інструментом сучасних обчислювальних методів.

Вивчення методів інтерполяції є важливою складовою підготовки студентів спеціальностей галузі комп'ютерних наук. Засвоєння цих методів сприяє формуванню у студентів навичок математичного моделювання, аналізу даних та розроблення алгоритмів для розв'язання прикладних задач.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Методи інтерполяції посідають важливе місце у чисельному аналізі та широко застосовуються у задачах обробки даних, комп'ютерного моделювання, цифрової обробки сигналів і комп'ютерної графіки. Зростання обсягів інформації та розвиток обчислювальних технологій зумовлюють підвищення актуальності досліджень, пов'язаних із побудовою ефективних алгоритмів апроксимації та відновлення функціональних залежностей на основі дискретних даних.

Теоретичні основи інтерполяції були сформовані у межах класичного чисельного аналізу, де розроблено низку методів побудови інтерполяційних функцій. У сучасних дослідженнях значна увага приділяється питанням підвищення точності інтерполяції, оптимізації обчислювальних алгоритмів та розширення можливостей їх використання у програмних системах.

У статті [1] описано та валідовано високопродуктивний метод, заснований на сплайн-інтерполяції, який може значно пришвидшити обчислення фундаментальних наукових та статистичних функцій. Це пропонує практичний шлях для прискорення як аналізу великих наборів даних, так і прогресу наукових досліджень.

У роботі [2] представлено новий алгоритм для автоматичного розподілу вузлів у сплайновій інтерполяції, розроблений для задоволення вимог до точності, визначених користувачем. Цей алгоритм забезпечує зручний

**ISSN 2786-6025 Online**

інструмент для вирішення інтерполяційних задач в обчислювальній астрофізиці та космології.

У статті [3] представлено метод симетричної хвильової інтерполяції для стабільної глобальної інтерполяції з використанням легкодоступних рівновіддалених точок. Ключовим досягненням є інтеграція практичної корисності таких точок з числовою стабільністю чебишевської інтерполяції.

У дослідженні [4] розроблено інтерполяційну структуру для числових геонаукових даних PINI. Результати показують, що PINI є конкурентоспроможним з традиційними методами інтерполяції з точки зору точності перевірки, водночас є значно простішим з точки зору алгоритмічної складності та вимог до попередньої обробки даних.

У роботі [5] представлено чисельний підхід, який використовує сплайнові квазіінтерполяційні оператори на обмеженому інтервалі. Цей метод розроблено для забезпечення чисельного розв'язку для класу інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма зі слабо сингулярними ядрами.

Окремий напрям наукових робіт пов'язаний із застосуванням інтерполяційних методів у комп'ютерних науках, де вони використовуються для розв'язання задач обробки великих масивів даних, побудови графічних моделей та аналізу результатів чисельних експериментів.

#### *1. Інтерполяція у машинному навчанні та штучному інтелекті*

У статті [6] запропоновано архітектуру Інтерполяційна нейронна мережа, яка поєднує методи інтерполяції з глибоким навчанням. Модель дозволяє працювати з розрідженими даними, зменшити обчислювальні витрати, підвищити точність у задачах моделювання фізичних систем.

У роботі [7] описано модель нейронної мережі, що використовує теорію інтерполяції. Метод дозволяє будувати точні моделі для складних фізичних процесів і значно зменшує кількість параметрів порівняно з класичними.

У статті [8] розглядається сімейство інтерполяційних операторів нейронних мереж. Автори аналізують точність апроксимації функцій і властивості інтерполяції.

У роботі [9] досліджується різниця між інтерполяцією (передбачення всередині області даних) та екстраполяцією (передбачення за межами даних). Показано, що багато сучасних моделей машинного навчання добре виконують інтерполяцію, але мають труднощі з екстраполяцією. У роботі [10] розглядається гібридний підхід, який поєднує інтерполяційні та екстраполяційні методи для покращення точності прогнозування у задачах supervised learning.

В роботі [11] запропоновано алгоритм, який поєднує метод емпіричної інтерполяції з нейронними мережами для реконструкції фізичних полів. Метод добре працює навіть при шумі в даних та нестабільних сенсорних вимірюваннях.

У статті [12] описано метод, що використовує CNN-мережу для інтерполяції просторових даних, що дозволяє створювати безперервні карти просідання землі з більшою точністю, ніж традиційні методи (IDW, kriging).

### *2. Інтерполяція у цифровій обробці сигналів*

У цифровій обробці сигналів інтерполяція використовується для: реконструкції сигналів, фільтрації, відновлення пропущених даних. Особливо поширені поліноміальна інтерполяція та сплякни. Використання згладжувальних сплайнів дозволяє суттєво зменшити артефакти реконструкції, що є критично важливим для обробки медичних сигналів, аудіо та телекомунікаційних даних.

### *3. Інтерполяція у комп'ютерній графіці та візуалізації*

Комп'ютерна графіка є однією з найінтенсивніших сфер застосування інтерполяції. Тут вона використовується для: масштабування зображень, текстуровання, побудови кривих і поверхонь, анімації.

Найбільш широко застосовуються: білінійна інтерполяція, бікубічна інтерполяція, сплайнові поверхні.

У статті [13] порівнюються методи інтерполяції для підвищення роздільної здатності зображень. Дослідження показує, що різні алгоритми інтерполяції дають різну якість для різних типів зображень (шум, розмиття, контраст).

Робота [14] описує оптимізацію квадратичної та кубічної інтерполяції для графічних систем реального часу. Метод дозволяє виконувати складні обчислення через комбінацію лінійних інтерполяцій і забезпечити значне зниження обчислювальних витрат порівняно з типовими інтерполяціями вищого порядку.

У статті [15] запропоновано метод інтерполяції між складними 3D-поверхнями (елементами Без'є). Алгоритм використовує метричну інтерполяцію і чисельну оптимізацію для створення плавного переходу між формами.

Перетворення в галузі комп'ютерної графіки та геометрії є однією з найважливіших концепцій для ефективного маніпулювання та керування об'єктами у двовимірному та тривимірному просторі. У статті [16] досліджуються методи інтерполяції обертання і переміщення 3D-об'єктів.

Цей підхід широко використовується у анімації персонажів та 3D-трансформаціях.

У [17] показано використання методів інтерполяції відеокадрів. Метод використовує нейронні мережі для генерації проміжних кадрів між існуючими відеокадрами, що дозволяє створювати плавний рух і slow-motion відео. У [18] запропоновано алгоритм для інтерполяції кадрів, який вирішує проблему конфлікту пікселів при проєкції в новий кадр. [19] демонструє метод машинного навчання для генерації та інтерполяції векторної графіки і анімації.

#### 4. Інтерполяція у великих даних та наукових обчисленнях

У задачах аналізу великих даних інтерполяція використовується для: відновлення пропущених значень, зменшення розмірності, чисельного моделювання фізичних процесів. Сучасні інтерполяційні методи дозволяють істотно зменшити обчислювальну складність обробки великих наборів даних.

Метод Шепарда – це швидкий алгоритм, який класично використовується для інтерполяції розсіяних даних у кількох вимірах. У статті [20] запропоновано алгоритм Шепард-інтерполяції для апроксимації розріджених даних на сферичних поверхнях. Метод комбінує локальні поліноміальні інтерполянти та вагові функції, що базуються на геодезичних відстанях, і забезпечує оцінку похибки та збіжності. Описаний в [21] метод поєднує класичну Шепард-інтерполяцію з алгоритмом, що дозволяє підвищити стабільність чисельних обчислень. Числові експерименти демонструють чудову продуктивність нового методу в обробці складних наборів даних, що робить його цінним інструментом для різних застосувань у наукових обчисленнях та аналізі даних. Дослідження [22] пропонує єдину модель інтерполяції, що поєднує компактні функції та багатовимірні поліноми. Метод підвищує ефективність обчислень і точність апроксимації функцій у багатовимірних просторах. У роботі [23] застосовано кубічні сплайни для чисельного розв'язання рівнянь типу Власова, які використовуються в плазмовій фізиці та моделюванні динамічних систем. Метод [24] поєднує інтерполяцію Ньютона та Ерміта з методом скінченних елементів для ефективного розв'язання дробових дифузійних рівнянь. У [25] запропоновано чисельний метод на основі сплайнової інтерполяції, який використовується для розв'язування інтегродиференціальних рівнянь з сингулярними ядрами. Робота [26] досліджує квадратичні інтерполяційні моделі, що використовуються у методах оптимізації. Функції квадратичної моделі можуть вирішувати тестові задачі з меншою кількістю обчислень функцій, ніж традиційні алгоритми.

#### 5. Інтерполяція у керуванні та робототехніці

У системах керування інтерполяція застосовується для планування траєкторій, згладжування руху, стабілізації систем, підвищення стійкості систем керування.

У статті [27] запропоновано метод інтерполяції траєкторії для 5-осьових роботів, який використовує фільтри для згладжування траєкторії та обмеження прискорень під час руху. Метод підвищує точність обробки поверхонь і стабільність руху робота. У роботі [28] досліджується вплив кількості інтерполяційних точок на точність руху 6-осьового промислового робота. Показано, що збільшення кількості точок підвищує точність траєкторії, але надмірна кількість може викликати нестабільність системи керування. У [29] запропоновано метод поліноміальної інтерполяції траєкторії маніпулятора,

який підвищує точність руху і ефективність планування траєкторій для роботів із 6 ступенями свободи. Метод [30] створює безперервну навігаційну функцію шляхом інтерполяції дискретних даних карти середовища, що дозволяє мобільному роботу планувати траєкторію в реальному часі. У роботі [31] використано В-сплайн інтерполяцію для згладжування траєкторії роботи-зованої руки. Це дозволяє покращити стабільність руху та точність виконання завдань у виробничих системах. Метод [32] використовує криві Безьє та інтерполяцію Ерміта для генерації плавних траєкторій маніпулятора, що мінімізує різкі зміни швидкості та прискорення під час руху робота.

**Мета статті:** дослідження та розроблення програмної реалізації інтерполяційних алгоритмів та застосування їх у навчальному процесі

**Виклад основного матеріалу.** У найбільш загальному випадку задача інтерполювання полягає у побудові такої функції  $F(x)$ , яка у заданих точках  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  набуває значень  $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  заданої функції  $f(x)$ , а в інших точках заданого відрізка  $[a, b]$  наближує її. У такому випадку функція  $F(x)$  є інтерполюючою по відношенню до  $f(x)$ .

Нехай на відрізку  $[a, b]$  задано  $n+1$  точку  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , які називаються *вузлами інтерполяції*, і значення деякої функції  $f(x)$  в цих точках  $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ . Потрібно побудувати функцію  $F(x)$ , яка належить відомому класу і приймає у вузлах інтерполяції ті ж значення, що і  $f(x)$ , тобто таку, що

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (1)$$

Геометрично це означає, що потрібно знайти криву  $y = F(x)$  деякого визначеного типу, що проходить через задану систему точок  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). В такій загальній постановці задача може мати безліч розв'язків, або не мати жодного. Однак ця задача стає однозначною, якщо замість довільної функції  $F(x)$  шукати поліном  $P_n(x)$  степені не більше  $n$ , що задовольняє умову (1), тобто таку, що  $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$ . Отриману інтерполяційну формулу  $y = F(x)$  зазвичай використовують для наближеного обчислення значень даної функції  $f(x)$  для значень аргументу  $x$ , що відрізняється від вузлів інтерполяції. Це - *інтерполювання функції  $f(x)$* . При цьому розрізняють інтерполювання у вузькому розумінні, коли  $x \in [x_0, x_n]$ , тобто значення  $x$  є проміжним між  $x_0$  і  $x_n$ , та *екстраполювання*, коли  $x \notin [x_0, x_n]$ .

## Стандартна інтерполяція за Лагранжем

Для довільно заданих вузлів інтерполяції часто користуються так званою *інтерполяційною формулою Лагранжа*.

Нехай на відрізку  $[a, b]$  дані  $n+1$  різних значень аргумента:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  і відомі для функції  $y = f(x)$  відповідні значення:

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n. \text{ (рис. 1)}$$

Потрібно побудувати поліном  $L_n(x)$  степені не вище  $n$ , що має в заданих вузлах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ті самі значення, що і функція  $f(x)$ , тобто такий, що

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

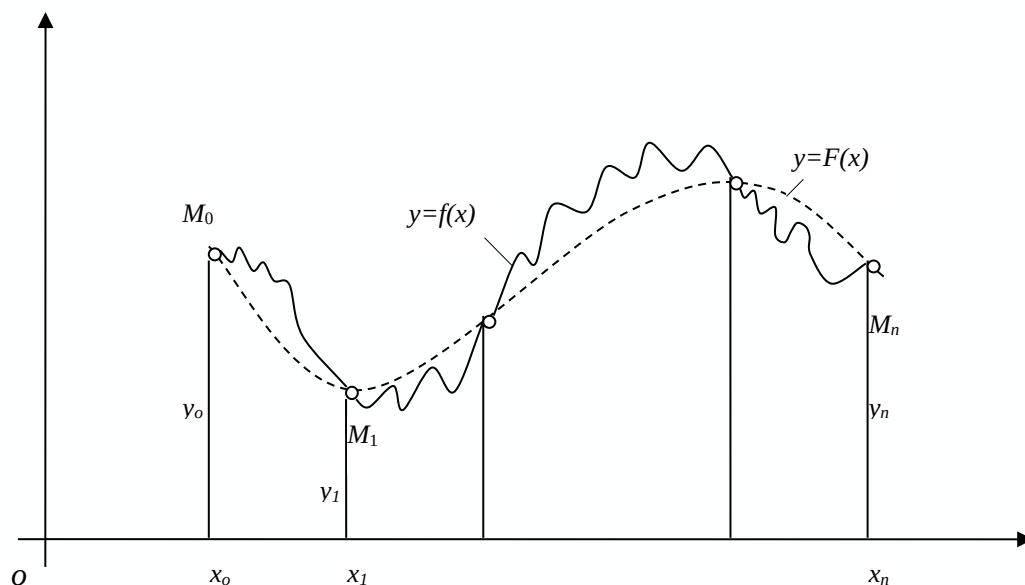


Рис. 1. Інтерполяційний поліном Лагранжа

Розв'яжемо спочатку часткову задачу: побудуємо поліном  $p_i(x)$  такий що  $p_i(x_j) = 0$  при  $j \neq i$  і  $p_i(x_i) = 1$

Коротше ці умови можна записати наступним чином:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = i; \\ 0, & \text{якщо } j \neq i, \end{cases}$$

Так як шуканий поліном перетворюється в нуль в  $n$  точках  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ , то він має вигляд

$$p_i(x) = C_i (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n), \quad (2)$$

де  $C_i$  - постійний коефіцієнт. Вважаючи  $x = x_i$  в формулі (2) і враховуючи, що  $p_i(x_i) = 1$ , отримаємо:

$$C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1.$$

Звідси:

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Підставивши це значення у формулу (2), будемо мати:

Тепер перейдемо до розв'язання загальної задачі: до відшукування полінома  $L_n(x)$ , що задовольняє вказаним вище умовам  $L_n(x_i) = y_i$ .

Цей поліном має наступний вигляд:  $L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) y_i$ .

Насправді, по-перше, очевидно, ступінь побудо-ваного полінома  $L_n(x)$  не вище  $n$  і, отже маємо:

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^n p_i(x_j) y_j = p_j(x_j) y_j = y_j \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

#### Векторна інтерполяція за Лагранжем

Нехай на відрізку  $[a, b]$  задані точки  $t_k$  (інтерполяційні вузли) і вектори  $v_k = \{x_k, y_k\}$  як значення деякої векторної функції  $f(t)$  в цих точках, тобто  $f(t_k) = v_k = \{x_k, y_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Треба знайти вектор-функцію  $r(t) = \{x(t), y(t)\}$ ,  $t \in [a, b]$ , графік якої містить точки  $M(t_j) = v_j = \{x_j, y_j\}$ . За умови неспівпадіння вузлів ( $t_j \neq t_k$  при  $j \neq k$ ,  $j, k \in 0, n$ ) інтерполяційна задача

завжди має єдиний розв'язок  $r(t) = P_n(t) = \sum_{s=0}^n p_s t^s$  у класі  $P_n$  поліномів степені  $n$  від однієї змінної  $t$  з векторними коефіцієнтами  $p_s$ .

Знаходження полінома  $P_n(x) = \sum_{s=0}^n p_s t^s$  зводиться до розв'язання завжди

сумісної системи лінійних рівнянь  $P_n(t_k) = \sum_{s=0}^n p_s t_k^s = v_k = \{x_k, y_k\}$ ,

$k = 0, 1, 2, \dots, n$

відносно векторних коефіцієнтів  $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ . Але є інший шлях розв'язання цієї задачі - потрібно скористатись формулою Лагранжа для векторної інтерполяційної задачі:

$$P_n(t) = L(t) = \sum_{s=0}^n v_s L_s(t) = \sum_{s=0}^n \{x_s, y_s\} L_s(t),$$

де  $L_s(t)$  – елементарні поліноми Лагранжа, що визначаються за формулами:

$$L_s(t_k) = \frac{(t - t_0) \dots (t - t_{s-1})(t - t_{s+1}) \dots (t - t_n)}{(t_s - t_0) \dots (t_s - t_{s-1})(t_s - t_{s+1}) \dots (t_s - t_n)}, \quad s = 0, n.$$

На рис. 2 наведено вигляд форми програми [33-35], що реалізує описані дії.

Інтерполяція є важливим розділом чисельних методів і прикладної математики, який займає значне місце у підготовці студентів спеціальностей, пов'язаних із комп'ютерними науками. Вивчення інтерполяційних методів дозволяє сформувати у студентів розуміння принципів роботи з дискретними даними, побудови математичних моделей та реалізації чисельних алгоритмів у програмному середовищі. Крім того, інтерполяція є важливим інструментом у сучасних технологіях, що активно використовуються у сфері комп'ютерних наук. Вона застосовується під час обробки великих масивів даних, у машинному навчанні, при побудові графічних моделей, у системах моделювання фізичних процесів та у задачах оптимізації. Тому ознайомлення студентів із методами інтерполяції сприяє формуванню фундаментальної математичної підготовки, необхідної для подальшого вивчення спеціалізованих дисциплін та виконання практичних досліджень.

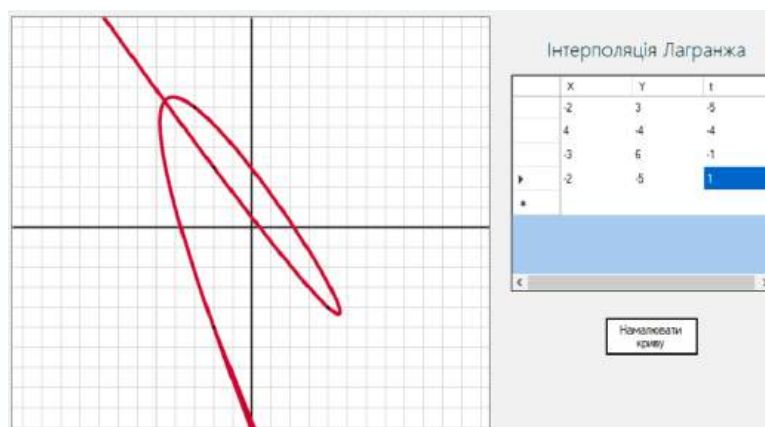


Рис. 2. Форма програми, що реалізує розрахунок та побудову інтерполяційної кривої Лагранжа

**Висновки.** Застосування інтерполяції є важливим у широкому спектрі наукових і прикладних галузей. У чисельних методах вона використовується для апроксимації функцій, інтегрування, розв'язування диференціальних рівнянь та побудови чисельних алгоритмів. У комп'ютерній графіці інтерполяція забезпечує побудову кривих і поверхонь, згладжування зображень та формування плавних переходів між геометричними об'єктами. У системах керування та робототехніці інтерполяційні алгоритми застосовуються для формування та оптимізації траєкторій руху, що дозволяє забезпечити плавність і точність переміщення механічних систем. Крім того, інтерполяція відіграє

важливу роль у сучасних методах аналізу даних і машинного навчання. Багато алгоритмів прогнозування фактично виконують інтерполяцію між відомими даними навчальної вибірки, що дозволяє будувати моделі, здатні оцінювати значення невідомих параметрів і узагальнювати закономірності, притаманні досліджуваним процесам.

Таким чином, інтерполяція є універсальним інструментом математичного моделювання та обробки даних. Її застосування дозволяє підвищити точність чисельних розрахунків, ефективно працювати з неповними або дискретними даними та забезпечувати побудову адекватних моделей складних процесів у різних галузях науки і техніки.

### **Література:**

1. Soper D. S. High-Speed Scientific Computing Using Adaptive Spline Interpolation, *Big Data Cogn. Comput.*, 2025, 9 (12): 308; <https://doi.org/10.3390/bdcc9120308>
2. Vitenti S. D. P. , de Simoni F., Penna-Lima M., Barroso E. J. AutoKnots: Adaptive Knot Allocation for Spline Interpolation, *Astronomy and Computing* Volume 53, 2025, 100970; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.13423>
3. Liu X.-Q., Liu H., Rong J.-Y. Fast and stable global interpolation based on equidistant points, *Numerical Analysis*; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.17911>
4. Kimiaghalam A., Swidinsky A., Parsa M. Interacting Immediate Neighbour Interpolation for Geoscientific Data, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.15781>
5. Saou, A., Sbibih, D., Tahrichi, M., & Barrera, D. (2024). Spline quasi-interpolation numerical methods for integro-differential equations with weakly singular kernels. *Mathematical Modelling and Analysis*, 29(3), 442–459. <https://doi.org/10.3846/mma.2024.18832>
6. Park C., Saha S., Guo J., Zhang H., Xie X., Bessa M. A., Qian D., Chen W. Unifying Machine Learning and Interpolation Theory via Interpolating Neural Networks, *Nature Communications*, 1;16(1):8753, 2025; doi: 10.1038/s41467-025-63790-8.
7. Park C., Saha S., Guo J., Zhang H., Xie X., Bessa M. A., Qian D., Chen W., Wagner G. J., Cao J., Liu W. K. Interpolating Neural Network: A Novel Unification of Machine Learning and Interpolation Theory – *arXiv*, 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.10296>
8. Uyan, H., Aslan, A.O., Karateke, S. *et al.* Interpolation for neural-network operators activated with a generalized logistic-type function. *Journal of Inequalities and Application*, 2024, 125. <https://doi.org/10.1186/s13660-024-03199-x>
9. Wang, Y., King, R.D. Extrapolation is not the same as interpolation. *Machine Learning Journal*, 113, 8205–8232 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10994-024-06591-2>
10. Jiang B., Zhu X., Tian X., Yi W., Wang S. Integrating Interpolation and Extrapolation: A Hybrid Predictive Framework for Supervised Learning, *Applied Sciences*, 2024, 14(15), 6414; <https://doi.org/10.3390/app14156414>
11. Li H., Gong H., Xu C. Neural-Network-Augmented Empirical Interpolation Method for Field Reconstruction with Noise and Vibration Tolerance. *Communications in Computational Physics*, Vol. 39 No. 3, 2026, 855-883. <https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2024-0099>
12. Azarm, Z., Mehrabi, H., and Nadi, S.: Enhanced land subsidence interpolation through a hybrid deep convolutional neural network and InSAR time series, *Geoscientific Model Development*., 18, 2025., 6903–6919, <https://doi.org/10.5194/gmd-18-6903-2025>

ISSN 2786-6025 Online

13. Jahnvi M., Rao D. R., Sujatha A. A Comparative Study of Super-Resolution Interpolation Techniques: Insights for Selecting the Most Appropriate Method – *Procedia Computer Science*, Volume 233, 2024, Pages 504-517  
<https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.03.240>
14. Lin D., Seiler L., Yuksel C. Hardware Adaptive High-Order Interpolation for Real-Time Graphics, *Computer Graphics Forum*, Volume 40, Issue 8, , 2021, pp. 1-16; <https://doi.org/10.1111/cgf.14377>
15. Huang Z., Liu S., Fu X.-M. High-Order Shape Interpolation, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 111, 2024, 102301
16. Kenwright B. Dual-Quaternion Interpolation, *arXiv*, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.13395>
17. Kalluri T., Pathak D., Chandraker M., Tran D. FLAVR: Flow-Agnostic Video Representations for Fast Frame Interpolation, *arXiv:2012.08512*, 2020; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.08512>
18. Niklaus S., Liu F. Softmax Splatting for Video Frame Interpolation, *arXiv:2003.05534*, 2020; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.05534>
19. Carlier A., Danelljan M., Alahi A., Timofte R. DeepSVG: A Hierarchical Generative Network for Vector Graphics Animation, *arXiv:2007.11301*, 2020; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.11301>
20. Dell'Accio, F., Di Tommaso, F. Interpolation of Scattered Data on the Sphere by Multinode Shepard Operators. *Journal of Scientific Computing*, 104, 96 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10915-025-03012-x>
21. Levin D., Ramón J., Ruiz-Alvarez J. Weighted Essentially Non-Oscillatory Shepard Method, *arXiv*, *arXiv:2412.02286*, 2024; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.02286>
22. Belianovich M., Fasshauer G., Narayan A., Shankar V. A Unified Framework for Efficient Kernel and Polynomial Interpolation, *arXiv*, *arXiv:2507.12629*, 2025; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.12629>
23. Vidal P., Bourne E., Grandgirard V. Local Cubic Spline Interpolation for Vlasov-type Equations on a Multi-Patch Geometry, *Journal of Scientific Computing*, 2026; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.22078>
24. Zhang H., Chen Y., Zhou J., Wang Y. Finite Element Scheme with H2N2 Interpolation for Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2024. DOI 10.4208/aamm.OA-2023-0117
25. Saou A., Sbibi D., Tahrichi M., Barrera D. Spline Quasi-Interpolation Numerical Methods for Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels, *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol 29, No 3, 2024; DOI: <https://doi.org/10.3846/mma.2024.18832>
26. Powell M., Scheinberg K. Least H<sup>2</sup> Norm Updating of Quadratic Interpolation Models for Derivative-Free Trust-Region Algorithms, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Volume 46, Issue 1, 2026, P. 21–50, <https://doi.org/10.1093/imanum/drae106>
27. Shi Z., Zhang W., Ding Y. Real-time interpolation with low-pass filtering for five-axis hybrid machining robots, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 209, 1 11108, 2024; <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.111080>
28. Lv Z., Wang Y., Zhang G., Determination method of limit interpolation points in industrial robot control system, *Robotica*, Volume 43, Issue 4, 2025. <https://doi.org/10.1017/S0263574725000359>

29. Hu Y., Zhang S., and Chen Y. Trajectory planning method of 6-DOF modular manipulator based on polynomial interpolation, *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, Volume 23, Issue 3, 2023; <https://doi.org/10.3233/JCM-226672>
30. Seder M., Klančar G. Convergent wheeled robot navigation based on an interpolated potential function and gradient, *Robotics and Autonomous Systems*, Volume 177, 2024, 104712
31. Cheng, M., Xu, S. Research on Trajectory Planning of Six-Degree-of-Freedom Robotic Arm Based on Improved Genetic Algorithm. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 111, 105 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10846-025-02306-4>
32. Pan S., Li J., Lv X., Jin W. Efficient trajectory planning for a 4-DOF robotic arm with curve interpolation and Gaussian process inference, *Robotica*, Volume 43 Issue 5, 2025. <https://doi.org/10.1017/S0263574725000530>
33. S. B. Lippman, J. Lajoie, B. E. Moo *C++ Primer*, Addison-Wesley: 2013. – 969 p. <https://zhjwpku.com/assets/pdf/books/C++.Primer.5th.Edition.2013.pdf>
34. Stroustrup B. *Programming: Principles and Practice Using C++* (2nd Edition). Addison-Wesley Professional, 2014. – 1312 p. [https://balka-book.com/ua/c\\_i\\_c-55/programming\\_principles\\_and\\_practice\\_using\\_c\\_2nd\\_edition-14352](https://balka-book.com/ua/c_i_c-55/programming_principles_and_practice_using_c_2nd_edition-14352)
35. B. Stroustrup *Tour of C++* // Addison-Wesley Professional, 2023. – 320 p. [https://balka-book.com/ua/c\\_i\\_c-55/tour\\_of\\_c-14360](https://balka-book.com/ua/c_i_c-55/tour_of_c-14360).

**References:**

1. Soper D. S. High-Speed Scientific Computing Using Adaptive Spline Interpolation, *Big Data Cogn. Comput.*, 2025, 9 (12): 308; <https://doi.org/10.3390/bdcc9120308>
2. Vitenti S. D. P., de Simoni F., Penna-Lima M., Barroso E. J. AutoKnots: Adaptive Knot Allocation for Spline Interpolation, *Astronomy and Computing* Volume 53, 2025, 100970; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.13423>
3. Liu X.-Q., Liu H., Rong J.-Y. Fast and stable global interpolation based on equidistant points, *Numerical Analysis*; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2511.17911>
4. Kimiaghalam A., Swidinsky A., Parsa M. Interacting Immediate Neighbour Interpolation for Geoscientific Data, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.15781>
5. Saou, A., Sbibi, D., Tahrichi, M., & Barrera, D. (2024). Spline quasi-interpolation numerical methods for integro-differential equations with weakly singular kernels. *Mathematical Modelling and Analysis*, 29(3), 442–459. <https://doi.org/10.3846/mma.2024.18832>
6. Park C., Saha S., Guo J., Zhang H., Xie X., Bessa M. A., Qian D., Chen W. Unifying Machine Learning and Interpolation Theory via Interpolating Neural Networks, *Nature Communications*, 1;16(1):8753, 2025; doi: 10.1038/s41467-025-63790-8.
7. Park C., Saha S., Guo J., Zhang H., Xie X., Bessa M. A., Qian D., Chen W., Wagner G. J., Cao J., Liu W. K. Interpolating Neural Network: A Novel Unification of Machine Learning and Interpolation Theory – *arXiv*, 2025. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.10296>
8. Uyan, H., Aslan, A.O., Karateke, S. *et al.* Interpolation for neural-network operators activated with a generalized logistic-type function. *Journal of Inequalities and Application*, 2024, 125. <https://doi.org/10.1186/s13660-024-03199-x>
9. Wang, Y., King, R.D. Extrapolation is not the same as interpolation. *Machine Learning Journal*, 113, 8205–8232 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10994-024-06591-2>
10. Jiang B., Zhu X., Tian X., Yi W., Wang S. Integrating Interpolation and Extrapolation: A Hybrid Predictive Framework for Supervised Learning, *Applied Sciences*, 2024, 14(15), 6414; <https://doi.org/10.3390/app14156414>

11. Li H., Gong H., Xu C. Neural-Network-Augmented Empirical Interpolation Method for Field Reconstruction with Noise and Vibration Tolerance. *Communications in Computational Physics*, Vol. 39 No. 3, 2026, 855-883. <https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2024-0099>

12. Azarm, Z., Mehrabi, H., and Nadi, S.: Enhanced land subsidence interpolation through a hybrid deep convolutional neural network and InSAR time series, *Geoscientific Model Development*, 18, 2025., 6903–6919, <https://doi.org/10.5194/gmd-18-6903-2025>

13. Jahnvi M., Rao D. R., Sujatha A. A Comparative Study of Super-Resolution Interpolation Techniques: Insights for Selecting the Most Appropriate Method – *Procedia Computer Science*, Volume 233, 2024, Pages 504-517 <https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.03.240>

14. Lin D., Seiler L., Yuksel C. Hardware Adaptive High-Order Interpolation for Real-Time Graphics, *Computer Graphics Forum*, Volume 40, Issue 8, , 2021, pp. 1-16; <https://doi.org/10.1111/cgf.14377>

15. Huang Z., Liu S., Fu X.-M. High-Order Shape Interpolation, *Computer Aided Geometric Design*, Volume 111, 2024, 102301

16. Kenwright B. Dual-Quaternion Interpolation, *arXiv*, 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.13395>

17. Kalluri T., Pathak D., Chandraker M., Tran D. FLAVR: Flow-Agnostic Video Representations for Fast Frame Interpolation, *arXiv:2012.08512*, 2020; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.08512>

18. Niklaus S., Liu F. Softmax Splatting for Video Frame Interpolation, *arXiv:2003.05534*, 2020; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.05534>

19. Carlier A., Danelljan M., Alahi A., Timofte R. DeepSVG: A Hierarchical Generative Network for Vector Graphics Animation, *arXiv:2007.11301*, 2020; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.11301>

20. Dell'Accio, F., Di Tommaso, F. Interpolation of Scattered Data on the Sphere by Multinode Shepard Operators. *Journal of Scientific Computing*, 104, 96 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10915-025-03012-x>

21. Levin D., Ramón J., Ruiz-Alvarez J. Weighted Essentially Non-Oscillatory Shepard Method, *arXiv*, *arXiv:2412.02286*, 2024; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2412.02286>

22. Belianovich M., Fasshauer G., Narayan A., Shankar V. A Unified Framework for Efficient Kernel and Polynomial Interpolation, *arXiv*, *arXiv:2507.12629*, 2025; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2507.12629>

23. Vidal P., Bourne E., Grandgirard V. Local Cubic Spline Interpolation for Vlasov-type Equations on a Multi-Patch Geometry, *Journal of Scientific Computing*, 2026; <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.22078>

24. Zhang H., Chen Y., Zhou J., Wang Y. Finite Element Scheme with H2N2 Interpolation for Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equation, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2024. DOI 10.4208/aamm.OA-2023-0117

25. Saou A., Sbibi D., Tahrichi M., Barrera D. Spline Quasi-Interpolation Numerical Methods for Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels, *Mathematical Modelling and Analysis*, Vol 29, No 3, 2024; DOI: <https://doi.org/10.3846/mma.2024.18832>

26. Powell M., Scheinberg K. Least  $H^2$  Norm Updating of Quadratic Interpolation Models for Derivative-Free Trust-Region Algorithms, *IMA Journal of Numerical Analysis*, Volume 46, Issue 1, 2026, P. 21–50, <https://doi.org/10.1093/imanum/drae106>

27. Shi Z., Zhang W., Ding Y. Real-time interpolation with low-pass filtering for five-axis hybrid machining robots, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 209, 1 11108, 2024; <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2023.111080>

28. Lv Z., Wang Y., Zhang G., Determination method of limit interpolation points in industrial robot control system, *Robotica*, Volume 43, Issue 4, 2025. <https://doi.org/10.1017/S0263574725000359>

29. Hu Y., Zhang S., and Chen Y. Trajectory planning method of 6-DOF modular manipulator based on polynomial interpolation, *Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering*, Volume 23, Issue 3, 2023; <https://doi.org/10.3233/JCM-226672>

30. Seder M., Klančar G. Convergent wheeled robot navigation based on an interpolated potential function and gradient, *Robotics and Autonomous Systems*, Volume 177, 2024, 104712

31. Cheng, M., Xu, S. Research on Trajectory Planning of Six-Degree-of-Freedom Robotic Arm Based on Improved Genetic Algorithm. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 111, 105 (2025). <https://doi.org/10.1007/s10846-025-02306-4>

32. Pan S., Li J., Lv X., Jin W. Efficient trajectory planning for a 4-DOF robotic arm with curve interpolation and Gaussian process inference, *Robotica*, Volume 43 Issue 5, 2025. <https://doi.org/10.1017/S0263574725000530>

33. S. B. Lippman, J. Lajoie, B. E. Moo *C++ Primer*, Addison-Wesley: 2013. – 969 p. [https://zhjwpku.com/assets/pdf/books/C++.Primer.5th.Edition\\_2013.pdf](https://zhjwpku.com/assets/pdf/books/C++.Primer.5th.Edition_2013.pdf)

34. Stroustrup B. *Programming: Principles and Practice Using C++* (2nd Edition). Addison-Wesley Professional, 2014. – 1312 p. [https://balka-book.com/ua/c\\_i\\_c-55/programming\\_principles\\_and\\_practice\\_using\\_c\\_2nd\\_edition-14352](https://balka-book.com/ua/c_i_c-55/programming_principles_and_practice_using_c_2nd_edition-14352)

35. B. Stroustrup *Tour of C++* // Addison-Wesley Professional, 2023. – 320 p. [https://balka-book.com/ua/c\\_i\\_c-55/tour\\_of\\_c-14360](https://balka-book.com/ua/c_i_c-55/tour_of_c-14360).

*Дата першого надходження статті до видання: 12.03.2026*

*Дата прийняття статті до друку після рецензування: 26.03.2026*