УДК 531.8:621.865.8

ФОРМУВАННЯ РОЗРАХУНКОВОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ МЕХАНІЗМУ ПРОСТОРОВОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ ОБ'ЄКТІВ

Воляник О.Ю., Кайдаш В.Ю.
Київський національний університет технологій та дизайну

Для механізмів просторового переміщення об'єктів вибір структури та геометричних параметрів не гарантує необхідної точності позиціювання, якщо не враховано змінність інерційного навантаження протягом робочого циклу. У роботі [1] визначено сукупність чинників, які мають бути включені до динамічного аналізу: масово-інерційні характеристики ланок і вантажу, закон руху ведучої ланки, положення центрів мас та пружні властивості системи. Подальший розвиток дослідження полягає у формуванні розрахункової моделі, яка поєднує ці чинники та дає змогу визначати момент приводу як функцію узагальненої координати і часу.

Важливим напрямом дослідження є формування послідовності динамічного розрахунку механізму просторового переміщення об'єктів на основі енергетичного підходу та матричного опису кінематики. Така модель має бути придатною для параметричного аналізу, порівняння законів руху й подальшої перевірки у CAD/CAE-середовищі.

Положення кожної ланки пропонується описувати за допомогою однорідної матриці перетворення, сформованої відповідно до структури кінематичного ланцюга. Для послідовного кінематичного ланцюга положення центра мас i-ї ланки її радіус-вектор у нерухомій системі координат визначається залежністю:

$$\tilde{r}_i(q) = A_{01}(q)A_{12}(q)\cdots A_{i-1,i}(q)\tilde{r}_i^{(i)}, \qquad (1)$$

де $q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]^T$ – вектор незалежних узагальнених координат; $A_{i-1,i}$ – матриця переходу між суміжними системами координат; $\tilde{r}_i^{(i)}$ – однорідні координати центра мас у системі ланки. Лінійну та кутову швидкості доцільно визначати через відповідні якобіани $J_{vi}(q)$ і $J\omega_i(q)$ [2]:

$$v_i = J_{v_i}(q)\dot{q}, \qquad \omega_i = J_{\omega_i}(q)\dot{q} \qquad (2)$$

Кінетична енергія моделі повинна враховувати поступальний і обертальний рух усіх ланок, а також переміщуваний об'єкт як змінне корисне навантаження:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i v_i^T v_i + \omega_i^T I_i^{(0)}\omega_i\right] + \frac{1}{2}m_p v_p^T v_p + \frac{1}{2}\omega_p^T I_p^{(0)}\omega_p \qquad (3)$$

де m_i та $I_i^{(0)}$ – маса і тензор інерції і-ї ланки, приведений до нерухомої системи координат; m_p, $I_p^{(0)}$, v_p та ω_p – відповідні параметри вантажу. Включення вантажу окремою складовою дає можливість змінювати його масу та положення центра мас без перебудови всієї моделі. Потенціальна енергія визначається висотою центрів мас відносно прийнятого нульового рівня, а за потреби до неї додається енергія пружних елементів

Для незалежних узагальнених координат рівняння руху жорсткої системи має вигляд [3]:

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + Q_f(\dot{q}) + K\,\Delta q = Q \qquad (4)$$

де $M(q)$ – матриця інерції; $C(q, \dot{q})$ – матриця коріолісових і відцентрових складових; $g(q)$ – вектор гравітаційних сил; $Q_f(\dot{q})$ – узагальнені сили опору; $K\Delta q$ – складова, зумовлена пружними деформаціями; Q – вектор сил і моментів приводів. Для механізму з одним ведучим приводом рівняння (4) можна звести до скалярної залежності:

$$M_д(t) = J_{пр}(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{dJ_{пр}(q)}{dq}\dot{q}^2 + M_{ст}(q) + M_{оп}(\dot{q}) \qquad (5)$$

де $J_{пр}(q)$ – приведений до ведучої ланки момент інерції; $M_{ст}(q)$ – момент від сил ваги та технологічного навантаження; $M_{оп}(\dot{q})$ – момент опору. Приведений момент інерції не є сталою величиною: для просторового механізму він змінюється разом із конфігурацією. За $\dot{q} \neq 0$ його визначають за рівністю кінетичних енергій:

$$J_{пр}(q) = \frac{2T}{\dot{q}^2} \qquad (6)$$

Практичний розрахунок запропоновано виконувати за шістьма послідовними етапами: параметризація геометрії та масових характеристик; побудова матриць перетворення; визначення швидкостей і прискорень центрів мас; формування залежності $Mд(t)$; оцінювання пікових і середньоквадратичних показників. Розрахунок повторюють для граничних значень маси вантажу та можливого зміщення його центра мас. Це дозволяє відокремити навантаження, зумовлене власною масою механізму, від складової, яка виникає через об’єкт маніпулювання.

Окремим параметром моделі є закон зміни узагальненої координати $q(t)$. Для переміщення на величину h за час $t_ц$ його зручно подати як $q(t) = q_0 + h\,f(\tau)$, де $\tau = t/t_ц$, $0 \le \tau \le 1$. Для поліноміального закону п’ятого ступеня $f(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5$ максимальне значення модуля нормованого прискорення становить $10/\sqrt{3} \approx 5{,}77$; швидкість і прискорення на початку та наприкінці переміщення дорівнюють нулю. Для циклоїдального закону $f(\tau) = \tau - \sin(2\pi\tau)/(2\pi)$ максимальне нормоване прискорення дорівнює $2\pi \approx 6{,}28$, а зміна швидкості й прискорення має неперервний гармонічний характер. Отже, за однакових h і $t_ц$ поліноміальний закон формує приблизно на 8 % менше пікове прискорення, проте остаточний вибір потрібно здійснювати з урахуванням ривка та моменту приводу.

Висновки. Запропоновано розрахункову модель динамічного навантаження механізму просторового переміщення об’єктів, яка поєднує матричний опис кінематики, енергетичне визначення приведеного моменту інерції та рівняння моменту приводу. На відміну від загальної оцінки кінетичної енергії, модель враховує залежність інерційних параметрів від конфігурації, змінну масу вантажу, його ексцентриситет, закон руху й сили опору. Це дозволяє порівнювати варіанти руху за піковим і середньоквадратичним моментами, прискоренням та ривком і може бути використаний для параметричної оптимізації механізму.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кайдаш В. Ю., Визначення підходів до динамічного аналізу механізму просторового переміщення об’єктів / В. Ю. Кайдаш, О. Ю. Воляник // Мехатронні системи: інновації та інжиніринг : збірник наукових праць IX Міжнародної наук.-практ. конф. (23 квітня 2026 р., м. Київ). – Київ : КНУТД, 2026. – С. 76-77.

2. Lynch K. M., Park F. C. Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control. Cambridge : Cambridge University Press, 2017. 544 p.

3. Siciliano B., Sciavicco L., Villani L., Oriolo G. Robotics: Modelling, Planning and Control. London : Springer, 2009. 632 p.

4. Дмитрів В. Т., Ланець О. С. Динаміка і точність роботів : монографія. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2021. 200 с.