Нестеренко Ольга Борисовна, кандидат физ.-мат. наук
Киевский национальный университет технологий и дизайна, Киев, Украина
e-mail: Olga_kiev@mail.ru

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Нестеренко О. Б.

Рассматривается и обосновывается применение итерационного метода построения решений краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения с параметром.

Суть метода применительно к задаче

$$(Fx)(t) = f(t) + \xi(t)\eta + \int_a^b M(t,s)(Nx)(s)ds, \tag{1}$$

$$W(x) = \chi, \quad \int_a^b R(t)x(t)dt = \alpha \,, \tag{2}$$

в которой $f \in L_2[a, b]$, $(Fx)(t)$, $(Nx)(t)-$ дифференциальные операторы, ядро $M(t,s)$, матрицы $\xi(t)$ и $R(t)$, постоянная матрица W, $\chi \in R^m$, $\alpha \in R^l -$ задаются, состоит в том, что имея приближение $(\eta_{k-1}; x_{k-1}(t))$ к искомому решению выполняется итерация

$$\begin{aligned} P_k(t) = f(t) + p_1(t)x_{k-1}^{(m-1)}(t) + \ldots + p_m(t)x_{k-1}(t) + \\ + \int_a^b M(t,s)\left(q_0(s)x_{k-1}^l(s) + \ldots + q_l(s)x_{k-1}(s)\right)ds \end{aligned} \tag{3}$$

и следующее приближение $(\eta_k; x_k(t))$ определяется из вспомогательной задачи

$$(Zx)(t) = \xi_k(t)\eta_k + P_k(t), \quad W(x_k) = \chi, \quad \int_a^b R(t)x_k(t)dt = \alpha \,. \tag{4}$$

Начальное приближение вычисляется из задачи (4) при $k=0$ и заданной функции $P_0(t)$.

Установлено, что итерационный метод (3), (4) для задачи (1), (2) сводится к решению эквивалентного задаче интегрального уравнения

$$P(t) = h(t) + \int_a^b K(t,s)P(s)ds. \tag{5}$$

Таким образом, вопросы условий сходимости и оценки погрешности метода (3), (4) сводятся к установлению условий сходимости и оценок погрешности метода последовательных приближений для интегрального уравнения (5), которые широко освещены в литературе, например [1].

Теорема. Если спектральный радиус оператора $(Kx)(t) = \int_a^b K(t,s)P(s)ds,$ $\rho(K) < 1,$ тогда существует единственное решение $(\eta; x(t))$ задачи (1), (2) и последовательность приближенных решений, построенных методом (3), (4), сходится к этому решению, то есть

$$\lim_{k\to\infty} \eta_k = \eta^*, \quad \lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t).$$

1. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. – Киев: Наукова думка, 1993. – 288 с.