УДК 517.5

НЕРІВНОСТІ ТИПУ БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ $\bar{\psi}$-ПОХІДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

П.В. ЗАДЕРЕЙ, П.А. ПОПОВ

Київський національний університет технологій та дизайну

Доведено нерівність типу Бернштейна для тригонометричних поліномів, гармоніки яких обираються з "гіперболічних хрестів"

Поняття $\bar{\psi}$-похідної було введене О.І. Степанцем (див., напр., [1]). Нехай функція $f \in L$ має ряд Фур'є

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(f;x).$$

Нехай задано пару $\bar{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ числових послідовностей $\psi_1(k), \psi_2(k)$ таку, що

$$\bar{\psi}^2(k) := \psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0, \; k \in \mathbb{N}.$$

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(k)}{\bar{\psi}^2(k)} A_k(f;x) - \frac{\psi_2(k)}{\bar{\psi}^2(k)} \tilde{A}_k(f;x)\right)$$

є рядом Фур'є для деякої функції, то її називають $\bar{\psi}$-похідною функції f і позначають $f^{\bar{\psi}}$.

Нехай функція двох змінних $f \in L_1$ має ряд Фур'є виду

$$f(x) \sim \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} 2^{-\gamma k} A_{k_1k_2}(f,x), \quad x = (x_1, x_2),$$

де

$$A_{k_1k_2}(x_1, x_2) = a_{k_1k_2} \cos k_1x_1 \cos k_2x_2 + b_{k_1k_2} \cos k_1x_1 \sin k_2x_2 +$$
$$+ c_{k_1k_2} \sin k_1x_1 \cos k_2x_2 + d_{k_1k_2} \sin k_1x_1 \sin k_2x_2.$$

Визначимо мішану $\bar{\psi}$-похідну у розумінні О.І. Степанця наступним чином. Нехай задано дві пари функцій

$$\psi^{(1)}(k_1) = \left(\psi_1^{(1)}(k_1), \psi_2^{(1)}(k_1)\right), \; \psi^{(2)}(k_2) = \left(\psi_1^{(2)}(k_2), \psi_2^{(2)}(k_2)\right),$$

причому $\left(\psi_1^{(i)}(k_i)\right)^2 + \left(\psi_2^{(i)}(k_i)\right)^2 \neq 0, \; i = 1, 2, \; k_i \in \mathbb{N}$. Позначимо також

$$\bar{\psi} := \bar{\psi}(k_1, k_2) := \left(\psi^{(1)}(k_1), \psi^{(2)}(k_2)\right),$$

$$\bar{\psi}^2(k_1,k_2):=\left(\left(\psi_1^{(1)}(k_1)\right)^2+\left(\psi_2^{(1)}(k_1)\right)^2\right)\left(\left(\psi_1^{(2)}(k_2)\right)^2+\left(\psi_2^{(2)}(k_1)\right)^2\right).$$

Нехай також $\tilde{A}^{(i)}_{k_1k_2}(x_1,x_2)$ – вираз, тригонометрично спряжений за i-тою змінною, $i=1,2$, тобто

$$A^{(1)}_{k_1k_2}(x_1,x_2)=a_{k_1k_2}\sin k_1x_1\cos k_2x_2+b_{k_1k_2}\sin k_1x_1\sin k_2x_2-$$
$$-c_{k_1k_2}\cos k_1x_1\cos k_2x_2-d_{k_1k_2}\cos k_1x_1\sin k_2x_2,$$
$$A_{k_1k_2}(x_1,x_2)=a_{k_1k_2}\cos k_1x_1\sin k_2x_2-b_{k_1k_2}\cos k_1x_1\cos k_2x_2+$$
$$+c_{k_1k_2}\sin k_1x_1\sin k_2x_2-d_{k_1k_2}\sin k_1x_1\cos k_2x_2.$$

Означення. Якщо ряд

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{\psi}^2(k_1,k_2)}\Big(\psi_1^{(1)}(k_1)\psi_1^{(2)}(k_2)A_{k_1k_2}(x_1,x_2)-\psi_1^{(1)}(k_1)\psi_2^{(2)}(k_2)\tilde{A}^{(2)}_{k_1k_2}(x_1,x_2)-$$
$$-\psi_2^{(1)}(k_1)\psi_1^{(2)}(k_2)\tilde{A}^{(1)}_{k_1k_2}(x_1,x_2)+\psi_2^{(1)}(k_1)\psi_2^{(2)}(k_2)\tilde{A}^{(1),(2)}_{k_1k_2}(x_1,x_2)\Big)$$

є рядом Фур'є деякої функції, то цю функцію називатимемо мішаною $\bar{\psi}$-похідною і позначатимемо $f^{\bar{\psi}}$.

Нехай $N_1>0,\ N_2>0,\ \bar{N}:=(N_1,N_2)$. Визначимо дві множини

$$\Gamma\left(N_1,\psi_1^{(1)}\right)=\left\{(k_1,k_2)\in\square^2:\ \psi_1^{(1)}(k_1)\psi_1^{(2)}(k_2)\ge\psi_1^{(1)}(N_1)\right\},$$
$$\Gamma\left(N_2,\psi_2^{(1)}\right)=\left\{(k_1,k_2)\in\square^2:\ \psi_2^{(1)}(k_1)\psi_2^{(2)}(k_2)\ge\psi_2^{(1)}(N_2)\right\}$$

і покладемо $\Gamma\left(\bar{N},\bar{\psi}\right)=\Gamma\left(N_1,\psi_1^{(1)}\right)\cap\Gamma\left(N_2,\psi_2^{(1)}\right)$. Розглядатимемо тригонометричні поліноми виду

$$t(x)=\sum_{k\in\Gamma(\bar{N},\bar{\psi})}A_k(x),\ k=(k_1,k_2),\ x=(x_1,x_2).$$

Основним результатом, що обговорюється в доповіді, є наступна

Теорема. Нехай функції $\psi_j^{(i)}(\cdot),\ i,j=1,2$ задовольняють умови:

1) $\psi_1^{(1)}(k)\ge\psi_1^{(2)}(k)>0,\ \psi_2^{(1)}(k)\ge\psi_2^{(2)}(k)>0$;

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\psi_1^{(1)}(k)=\lim\limits_{k\to\infty}\psi_2^{(1)}(k)=0$;

3) $\psi_j^{(i)}(k)>\psi_j^{(i)}(k+1),k\in\square$;

4) $c_1\psi_j^{(i)}(2t)\le\psi_j^{(i)}(t)\le c_2\psi_j^{(i)}(2t),\ \forall t\ge1$;

5) $c_3\dfrac{\psi_j^{(i)}(t)}{t}\le\left|\left(\psi_j^{(i)}(t)\right)'\right|\le c_4\dfrac{\psi_j^{(i)}(t)}{t},\ \forall t\ge1$.

Тоді справедливе співвідношення

$$\frac{\ln N_1}{\psi_1^{(1)}(N_1)}+\frac{\ln N_2}{\psi_2^{(1)}(N_2)} \asymp \sup_{t\in T(\bar{N},\bar{\psi})} \frac{\left\|t^{\bar{\psi}}\right\|_C}{\|t\|_C} \asymp \frac{\ln N_1}{\psi_1^{(1)}(N_1)}+\frac{\ln N_2}{\psi_2^{(1)}(N_2)}.$$

Зауваження. Якщо покласти

$$\psi_1^{(1)}(k_1)=\psi_1(k_1)\cos\frac{\beta_1\pi}{2},\ \psi_2^{(1)}(k_1)=\psi_1(k_1)\sin\frac{\beta_1\pi}{2},$$

$$\psi_1^{(2)}(k_2)=\psi_2(k_2)\cos\frac{\beta_2\pi}{2},\ \psi_2^{(2)}(k_2)=\psi_2(k_2)\sin\frac{\beta_2\pi}{2},$$

то одержимо мішану $(\bar{\psi},\bar{\beta})$-похідну (П.В. Задерей [2]). При $\psi_i(k_i)=k_i^{-r_i}, r_i>0$ оцінка зверху для деяких r, β випливає з роботи К.І. Бабенко [3]. Для довільних r_i, β_i ця оцінка випливає з роботи С.О. Теляковського [4]. Оцінка знизу в цьому випадку отримана С.О. Теляковським [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. Степанец А.И. Методы теории приближений. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. I. – 427 с.
2. Задерей П.В. Неравенства типа Бернштейна. – В сб.: Ряды Фурье: теория и приложения. – К.: 1992. – С. 41 – 48.
3. Бабенко К.И. О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами // ДАН СССР. – 1960. – 132, №5. – с. 982 – 985.
4. Теляковский С.А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – 63, № 3. – с. 426 – 444.
5. Теляковский С.А. Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. жур. – 1963. – 4, № 6. – с. 1404 – 1411.

Надійшла 30.06.2010

УДК 517.518.4

НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ СУМАМИ ВАЛЛЕ-ПУССЕНА

П.В. ЗАДЕРЕЙ, О.В. ІВАЩУК

Київський національний університет технологій та дизайну

Отримано необхідні умови збіжності в середньому кратних рядів Фур'є інтегрованих функцій.

Нехай $f\in L_1(T^m),\ T^m=[0;2\pi)^m$ і

$$S[f]=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|l|_1=k}c_l e^{i(l,x)}$$