УДК 330.11:519

О МОДЕЛЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ

В.А. КУРЗЕНЕВ

Северо-западная академия государственной службы (Россия)

Предлагается исследовать макроэкономику на основе динамической стохастической модели с оценкой состояния и использованием принципа максимума для различных классов производственных функций.

Для выработки конструктивных и обоснованных экономических решений представляется совершенно необходимым учитывать не только прошлый опыт, но и результаты, полученные при концептуальном и математическом моделировании по адекватным моделям конкретной экономической ситуации. Согласно экономической теории в экономике действуют устойчивые экономические закономерности, для описания которых можно использовать формальный математический язык. Это значит, что экономику можно изучать, используя математические модели. Математические модели на макроуровне отражают функционирование и развитие всей экономической системы (или крупных подсистем), а на микроуровне – функционирование хозяйственных единиц и их объединений. Для анализа общих закономерностей и тенденций экономики в целом можно ограничиться макроуровнем. В этом случае экономика рассматривается как целостная, неструктурированная единица. Известны линейные и нелинейные динамические модели макроэкономики с дискретным и непрерывным временем [4]. Из линейных динамических моделей макроэкономики с дискретным временем наибольшее распространение получили модели Кейнса, Самуэльсона-Хикса, Леонтьева, Неймана. Из линейных динамических моделей с непрерывным временем – модели Кейнса, Самуэльсона – Хикса.

Результаты и их обсуждение

Экономическая система на макроуровне может рассматриваться как система, на вход которой поступают ресурсы, а на выходе получается результат функционирования в форме валового внутреннего продукта. И в этом случае математическую модель в виде зависимости валового внутреннего продукта от ресурсов называют производственной функцией: $X = F(K, L)$,

где X – валовый внутренний продукт; K – производственные фонды (капитал); L – трудовые ресурсы.

Если параметры производственной функции зависят от времени (дискретно или непрерывно), то можно проводить анализ динамики экономической системы.

Как известно [6], производственная функция составляет основу практически всех моделей макроэкономики. В свою очередь, производственные функции могут выбираться из класса линейных и нелинейных функций. В линейных моделях анализ практически проводится на основе традиционных методов и не представляет серьезных проблем для моделирования. В нелинейных динамических моделях макроэкономики используются, как правило, нелинейные производственные функции. Такие модели макроэкономики представляются наиболее адекватными при исследовании экономических процессов на всех уровнях, включая уровни региона. Наиболее простой и известной из нелинейных динамических моделей макроэкономики с непрерывным временем является модель Солоу.

Однако ограничения такой модели слишком существенны и не позволяют считать модель достаточно адекватной. К этим ограничениям относятся:: 1) экономическая система рассматривается как однородная система, т.е. как единое целое; 2) экономическая система замкнутая, т.е. взаимообмен между системами отсутствует; 3) описываемые процессы в системе детерминированные; 4) последействие не учитывается; 5) трудовые ресурсы однородные; 6) не учитывается влияние финансовой составляющей на экономическую систему.

При таких ограничениях модель оказывается слишком идеализированной. Поэтому интерес представляют модели, в которых ограничения последовательно снимаются.

Кроме того, процесс развития экономики в регионе на уровне интегральных показателей можно описать и с помощью динамической модели с использованием формальной схемы стохастических дифференциально-функциональных уравнений, или же схемы «пространство-состояние», в которой, по-существу, возможен учет внешних воздействий с принятием определенной структуры самой экономической системы. Более того, этот подход может позволить в процессе исследования проводить параметрическую адаптацию к складывающейся реальной ситуации. Исследования можно проводить на моделях макроэкономики, рассматривая экономику региона как единую однородную систему, либо с разделением ее по укрупненным группам – секторам. В настоящей работе сделана попытка сформулировать математическую постановку задачи управления экономикой с помощью моделей на основе указанных подходов и наметить пути их решения.

1. Стохастическая модель однородной экономики

Постановка задачи управления односекторной региональной экономикой с оценкой состояния в общем виде изложена в [5]. В указанной постановке требуется конкретизировать класс производственных функций.

Экономическое состояние и развитие региона принято анализировать с применением известных макроэкономических показателей, а именно: региональным ВВП, основными фондами региона, трудовыми ресурсами, техническим прогрессом и фондом потребления. Связь между ними, как известно, выражается через производственную функцию $F(K, AL)$. Экономическая система региона рассматривается как единое целое. Универсальный продукт этой системы может потребляться и инвестироваться. Если не учитывать в явном виде связи с другими регионами («экспорт – импорт»), то процесс воспроизводства, т.е. экономический рост описывают с помощью модели Солоу в удельных показателях.

Развитие модели Солоу при учете различных ограничений на управление выполнено в [2], а учет запаздывания введения фондов приводит к модели Рамсея-Солоу, исследованной в [7]. В последней модели для анализа дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом используется формализм функций Ляпунова и оператора сдвига.

Однако эти модели не учитывает случайный характер воздействий различных факторов. Для учета случайных воздействий модель должна быть модифицирована. Эта модификация приводит к более адекватной реальным условиям стохастической модели, где в исходные уравнения внесена неопределенность, например, по трудовым ресурсам и техническому прогрессу. После необходимых преобразований [5], приходим к модели:

$$dk = \left[\rho(1-a)f(k) - (\eta+\nu+\mu)k + P(k)\right]dt + R(k)dZ,$$
$$k(0) = k_0 = \frac{K_0}{A_0 L_0}, \qquad (1)$$

где $k=\dfrac{K}{AL}$ – фондовооруженность; $x=\dfrac{X}{AL}-$народнохозяйственная производительность труда; $i=\dfrac{I}{AL}-$ удельные инвестиции; $c=\dfrac{C}{AL}-$среднедушевое потребление; K – фонды; A – технический прогресс; L – число занятых; X – ВВП; I – инвестиции; C – фонд непроизводственного потребления; $\mu-$норма амортизации (доля выбывших за год основных производственных фондов); $\rho-$норма накопления; *a* – коэффициент прямых затрат; $\nu-$ коэффициент роста рабочей силы; $\eta-$ коэффициент технического прогресса. Последние пять параметров являются экзогенными и находятся в следующих границах: $\mu\in(0;1)$, $\nu\in(-1;1)$, $\eta\in(0;1)$, $a\in(0;1)$, $\rho\in(0;1)$. Приняты также допущения

$$dZ_1dZ_2=rdt, dZ_1dt=dZ_2dt=dt^2=0, dZ_1^2=dZ_2^2=dt, dZ_1, dZ_2\in N(0,(dt)^2)$$

и введены обозначения:

$$P(k)=k(A_1\nu^2+A_1A_2\nu\eta r+A_2\eta^2), R^2(k)=k^2(A_1^2\nu^2+2A_1A_2\nu\eta r+A_2^2\eta^2)$$

где Z(t)- винеровский процесс, dZ$\in N(0,dt)$; $A_1(K,AL)dZ_1-$неопределенность для рабочей силы; $A_2(K,AL)dZ_2-$неопределенность технического прогресса; cov(d$Z_1dZ_2)=r$.

Уравнение (1) относится к диффузионному типу $dk(t)=b(t,k(t))dt+\sigma(t,k(t))dZ(t)$

с коэффициентом сноса $b(t,k(t))=\rho(1-a)f(k)-(\eta+\mu+\nu)k+P(k)$

и коэффициентом диффузии $\sigma(t,k(t))=R(k)$.

Структура решения стохастического дифференциального уравнения (1) определяется производственной функцией *f(k)* (Кобба-Дугласа, линейная функция, «затраты-выпуск», CES –функция, функция Солоу, функция Мукерджи).

Исследование уравнения (1) при различных производственных функциях должно дать ответ на вопрос «существует ли сильное решение стохастического дифференциального уравнения (1) и если существует, то единственное ли оно?»

Очевидно, что коэффициенты сноса и диффузии при выше указанных производственных функциях удовлетворяют условию Липшица и условию линейного роста, поэтому полученное стохастическое дифференциальное уравнение имеет единственное сильное решение. При выбранном классе производственных функций их неизвестные параметры (коэффициенты) оцениваются методами математической статистики на основе данных реальной статистики. Управляющими параметрами могут рассматриваться удельные инвестиции и среднедушевое потребление, например, через коэффициенты *a* и ρ , а также другие интересующие исследователя параметры.

2. Стохастическая модель открытой многосекторной экономики

Задача построения динамической модели для многосекторной экономики региона по [4] условно делится на три сектора: нулевой (материальный), производящий предметы труда; первый (фондосоздающий), производящий средства труда; второй (потребительский), создающий предметы потребления. Предполагается, что за каждым сектором закреплены основные производственные фонды, а труд и инвестиции могут свободно перемещаться между секторами, Экономика не является замкнутой системой. Тогда в качестве модели роста в удельных показателях для открытой многосекторной экономики в стохастической форме имеем:

$$\begin{cases} x_i = \theta_i f_i\left(k_i\right) \\ dk_i = \left[\dfrac{\left(x_1 + y_1\right) AL\rho_i \left(1 - a_i\right)}{A_1 L_1 x_1 + Ly_1} f_i\left(k_i\right) + \lambda_i k_i + P_i\left(k_i\right)\right] dt + R_i\left(k_i\right) dZ; \\ k_i\left(0\right) = \dfrac{K\ \left(0\right)}{\theta_i L\left(0\right)}, \\ \lambda_i = \nu_i + \mu_i + \eta_i, \quad i = 0,1,2, \\ x_i = \theta_i f_i\left(k_i\right) \\ \left(1 - a_0\right) x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + y_0, \quad y_0 \geq 0 \\ \theta_0 + \theta_1 + \theta_3 = 1, \quad \theta_i > 0, \quad i = 0,1,2, \\ s_0 + s_2 + s_2 = 1, \quad s_i > 0, \quad i = 0,1,2 \\ AL = A_0 L_0 + A_1 L_1 + A_2 L_2 \\ q_0 y_0 = q_1 y_1 + q_2 y_2, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

где $k_i = \dfrac{K_i}{A_i L_i}$ – фондовооруженность в і-м секторе;

$x_i = \dfrac{X_i}{A_i L_i}$ – народнохозяйственная производительность в і-м секторе;

$s_i = \dfrac{I_i}{X_1 + Y_1} = \dfrac{A_i L_i \rho_i \left(1 - a_i\right) f_i\left(k_i\right)}{A_1 L_1 x_1 + Ly_1}$ – доля инвестиций в і-м секторе в общем объеме инвестиций;

$\theta_i = \dfrac{A_i L_i}{AL}$ – доля числа занятых в і-м секторе экономики в общем числе занятых;

$y = \dfrac{Y_0}{L_0}$ – вывоз материалов на одного занятого;

$y_1 = \dfrac{Y_1}{AL}$ – ввоз инвестиционных товаров на одного занятого; $y_2 = \dfrac{Y_2}{AL}$ – ввоз потребительских товаров на одного занятого; L_i – число занятых в і-м секторе; A_i – технический прогресс по отраслям; K_i – фонды (капитал) в і-м секторе; X_i – выпуск продукции в і-м секторе; $f_i\left(k_i\right)$ – производительность труда в і-м секторе; $\nu_i\left(t\right)$ – годовой темп прироста числа занятых по секторам; μ_i – норма амортизации (доля выбывших за год основных производственных фондов по секторам); a_i – коэффициенты прямых материальных затрат по секторам; ρ_i – норма накопления по секторам; η_i – коэффициент технического прогресса по секторам.

В динамической модели роста управляющими параметрами могут быть θ_i, s_i, y_0, y_1, y_2. Поэтому далее возможны различные постановки задач на оптимальное управление.

Схема исследования для стохастической модели аналогична предыдущей. Коэффициенты сноса и диффузии при известных производственных функциях по секторам удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста, поэтому существует единственное сильное решение.

3. Стохастическая модель экономики с разделением трудовых ресурсов

Будем считать, что трудовые ресурсы разделены на три категории: лица с высшим образованием L_1, со средним образованием L_2 и все остальные L_3 . Это значит, что

$$L = L_1 + L_2 + L_3 ,$$

где $L_1 = L_{01} e^{\nu_1 t}$, $L_2 = L_{02} e^{\nu_2 t}$, $L_3 = L_{03} e^{\nu_3 t}$, $\nu_{1,2,3} \in (-1,1)$.

Удобнее перейти к обратным удельным показателям, т.е. абсолютные показатели относятся к фондам, а не к трудовым ресурсам. Тогда стохастическая модель при неопределенности по трудовым ресурсам и техническому прогрессу с учетом тех же допущений имеет вид:

$$dl_1 + dl_2 + dl_3 = \left[\frac{\eta + \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \mu}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l_2 + l_3)} - \rho(1-a) f(A_0 e^{\eta t}(l_1 + l_2 + l_3)) - P(\frac{1}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l \ + l_3)}) - \eta \right] dt +$$

$$+ R(\frac{1}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l_2 + l_3)}) dZ,$$

$$l_1(0) = l_{01} = \frac{A_0 L_{01}}{K_0}, \ l_2(0) = l_{02} = \frac{A_0 L_{02}}{K_0}, \ l_3(0) = l_{03} = \frac{A_0 L_{03}}{K_0}, \tag{3}$$

где $l_1 = \dfrac{A \cdot L_1}{K}$, $l_2 = \dfrac{A \cdot L_2}{K}$, $l_3 = \dfrac{A \cdot L_3}{K}$ − удельные фондовые трудозатраты;

$x = \dfrac{F(K, A(L_1 + L_2 + L_3))}{K} = f(A(l_1 + l_2 + l_3))$ − удельный (относительный) региональный ВВП;

$i = \dfrac{I}{K}$ – фондовая доля инвестиций ;

$c = \dfrac{C}{K}$ − фондовая доля потребления и введены обозначения

$$P(\frac{1}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l \ + l_3)}) = \frac{1}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l \ + l_3)} (A_1 \nu^2 + A_1 A_2 \nu \eta r + A_2 \eta^2),$$

$$R^2(\frac{1}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l \ + l_3)}) = \left(\frac{1}{A_0 e^{\eta t}(l_1 + l \ + l_3)} \right)^2 (A_1^2 \nu^2 + 2 A_1 A_2 \nu \eta r + A_2^2 \eta^2)$$

Аналогично предыдущей модели полученное уравнение относится к диффузионному типу с соответствующими коэффициентами сноса и диффузии

Структура решения дифференциального уравнения (3) определяется функцией f(Al) с соответствующей модификацией, например функция Кобба-Дугласа приобретает вид:

$$f(Al) = A(l_1^{\alpha_1} + l_2^{\alpha_2} + l_3^{\alpha_3}).$$

Коэффициенты сноса и диффузии при известных производственных функциях по трудовым ресурсам так же удовлетворяют условиям Липшица и линейного роста, поэтому, очевидно, существует единственное сильное решение.

Стохастические модели п.п.. 1, 2 и 3 могут рассматриваться без последействия и с последействием. В случае последействия за основу модели берется стохастическое дифференциально-функциональное уравнение Ито, а для его анализа применяется второй метод Ляпунова с использованием оператора Ляпунова-Красовского [8].

4. Динамическая модель макроэкономики «пространство- состояние»

Другим подходом анализа уравнений роста с получаемой текущей статистической информацией является формализм «пространство-состояние». Вместе с моделью роста в условиях воздействия случайных факторов рассматривают модель наблюдения, которую на первом этапе можно взять линейной: $y(t) = H(t)k(t) + \varepsilon(t)$,

Используя принцип разделения решаются две самостоятельные задачи. Задача фильтрации (слежения) связана с построением фильтра Калмана для линейного случая и фильтра Стратоновича для нелинейной правой части уравнения динамики (1) – (3). Находится оценки состояния как условные средние с построением и решением нелинейных дисперсионных уравнений типа Рикатти. Фильтр и будет решением стохастического дифференциального уравнения. По плотности распределения начальных условий можно поставить задачу нахождения закона распределения для искомой величины фондовооруженности и удельныз трудозатрат. Полученная оценка состояния используется при решении второй задачи – оптимального управления.

Задача оптимального управления обычно ставится на основе принципа Беллмана, или же принципа максимума Понтрягина. В качестве критерия качества, например, при использовании последнего принципа за простейший критерий можно принять функционал: $I = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} u(c(t))dt$, где $\delta -$ есть параметр дисконтирования; $u(c(t)) -$ есть функция полезности потребления.

Относительно функции полезности потребления принимаются допущения о строгой вогнутости, монотонности и возрастании. Далее схема известна [4,5] строится гамильтониан, находится условие его экстремума и по сопряженному оператору строится закон управления.

5. О вопросах исследования нелинейных динамических моделей макроэкономики с неустойчивостью

С учетом кейнсианского монетарного подхода модель трансформируется в модель Солоу-Тобина [3]. Такая нелинейная модель подлежит исследованию на наличие у нее «неподвижных» точек, точек бифуркации и на поведение системы при потере устойчивости. Учет случайного характера воздействия внешних факторов приводит к необходимости дополнительного анализа влияния факторов на предельные циклы, если они имеются, а также к необходимости подробного анализа структуры решений [3] В неустойчивой экономической системе случайные отклонения могут увести систему далеко от первоначальной траектории. Объем исследований оказывается весьма значительным, тем более, если в этих исследования есть необходимость рассматривать различные производственные функции. Механизм исследований основан на концепции формализма фазового пространства, связан с анализом фазовых портретов, с применением показателей Ляпунова, анализом на наличие аттракторов и точек бифуркации, анализом «детерминированного хаоса» [1,3]. Все это составляет большую самостоятельную область исследования.

Выводы

Таким образом, в настоящей работе указаны математические постановки задач для моделей: 1) замкнутой однородной экономики со случайными воздействиями; 2) многосекторной экономики с взаимодействием в удельных показателях; 3) открытой многосекторной экономики со случайными воздействиями; 4)стохастической экономики с разделением трудовых ресурсов; 5) «пространство – состояние» с оптимальным управлением и нелинейной фильтрацией.

Анализ и решение указанных задач управления и наблюдения для основных производственных функций в предложенных постановках представляют собой отдельный объект для исследований.

Кроме того, указаны направления исследований для анализа нелинейных динамических моделей макроэкономики на основе модели Тобина с использованием фазового концептуального подхода, концепции «детерминированного хаоса» и фракталов.

Представляется, что строгость математических постановок в изложенных моделях макроэкономики достаточна для получения практических рекомендаций в результате исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. – М.: – ЛКИ, – 2007, – 264 с.

2. Демин Н.С., Кулешова Е.В. Управление односекторной экономикой при ограничениях на накопление и ограничение// Проблемы управления, – 2009. – №6. – с. 9–17.

3. Занг В.-Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, – 1999, – 335 с.

4. Колемаев В.А. Экономико-математическое моделирование. – М.: ЮНИТИ, – 2005.

5. Курзенев В.А. Динамическая модель макроэкономических процессов с управлением в регионе // Материалы юбилейной научно-практической конференции СЗАГС-2002 «Государственное и муниципальное управление в России: история и современность». – С-Петербург, СЗАГС, – 2002, – 154 – 157

6. Столярю Л. Равновесие и экономический рост. – М.: Статистика, – 1974.

7.Хацкевич В.Л. Об устойчивости модифицированной модели Рамсея-Солоу, учитывающей запаздывание при вводе фондов// Экономика и математические методы, т.46, – 2010, – №1. – с. 137–143.

8. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: – Зинатне, – 1989.

Надійшла 25.10.2010