наукоемкой продукции // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2006. – №4/3(22). – с.69–72.

4. Химичева А.И., Зенкин А.С., Швачий В.М., Бузурный В.И. Экономические аспекты управления качеством изготовления наукоемкой продукции // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2007. - №1/2 (25). – с. 19–22.

5. ДСТУ ISO 9001–2001 Системи управління якістю. Вимоги. Введ. 01.10.2001. – К.: Держстандарт України, 2001. – 23с.

6. Каплан Р., Нортон Д. Система сбалансированных показателей. От стратегии к действию. Перевод с англ. – М.:– ЗАО «Олимп-Бизнес».– 2003.– 438 с.

7. Куликов Г.Г. Автоматизированное проектирование информационных управляющих систем. Проектирование экспертных систем на основе систем моделирования. - Уфа:–УГАТУ.– 1999.–188 с.

Надійшла 23.02.2010

УДК 510.5

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА АЛГОРИТМІВ ПОСЛІДОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, ЩО МІНІМІЗУЄ ПОШУКИ В ДЕРЕВІ ВАРІАНТІВ

В.М. ЯХНО, Г.В. МЕЛЬНИК

Київський національний університет технологій та дизайну

Повідомлення 2

Обчислювальна реалізація алгоритму

Запропоновано алгоритм розв'язку задачі дискретного програмування. У ході розв'язку задача, яка аналізується, замінюється послідовністю задач пошуку точок, які належать деяким підмножинам множини планів початкової задачі. Описано рекурентний спосіб побудови послідовності розв'язків допоміжних задач. Доведено, що ця скінченна послідовність збігається до розв'язку початкової задачі

Об'єкти та методи дослідження

Для вирішення задач знаходження мінімуму нелінійної функції, що визначена на деякій дискретній множині елементів евклідового простору, таких, що задовольняють системі нелінійних обмежень найбільш поширеними є обчислювальні схеми на основі схеми гілок і границь. В цьому випадку методи гілок та границь є алгоритмами варіантів сортування дерева, що поєднані з алгоритмами елімінації недопустимих та неоптимальних варіантів, а також алгоритмах розділення дискретних множин, які визначені в евклідовому просторі. Такими задачами є задачі визначення оптимальних планів розкрою легкої промисловості.

Алгоритми аналізу задач дискретного програмування, що базуються на ідеології гілок і границь та динамічного програмування (на цих обчислювальних схемах базуються майже всі відомі алгоритми за винятком алгоритмів відтинання Гоморі) є алгоритмами перебору варіантів. Пошук найбільш перспективних варіантів разом з обчисленням границь є одним з найважливіших факторів, що визначають ефективність алгоритму. В повідомленні, що пропонується, описаний алгоритм, що використовує ідеологію гілок та границь, але не потребує обчислення границь для кожної вершини, що висить та сортування вершин, що є висячими.

Постановка завдання

У першій частині повідомлення встановлено таку еквівалентність задачі максимізації функції $f_0(x)$ дискретного аргументу $x,\ x \in E_n,\ x^t = \{x_1,...,x_j,...,x_n\}$, або відшукання:

$$x^* = \arg\max_{x \in G} f_0(x), \tag{1}$$

на скінченій множині G, яка задається таким чином:

$$G = Q \cap G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_i \cap ... \cap G_m, \tag{2}$$

$$Q = [x / x_j \in Q_j,\ Q_j = \{h_{j1}, h_{j2}, ..., h_{jN}\}],\ G_i = [x / f_i^н \le f_i(x) \le f_i^в]. \tag{3}$$

Послідовність задач (***к=1,…)***, які полягають у відшуканні елементу $\bar{x}^k$, що задовольняє наступним умовам: $x^k \in G^k;\ \ \bar{\exists} x^{*k},\ x^{*k} \in G_k$, таким, що усі компоненти x^{*k}_j, крім одного, дорівнюють відповідним компонентам вектора $\bar{x}^k$, та $f_0(x^{*k}) > f_0(x^k)$.

Алгоритм розв'язування задач k побудований на послідовному розбитті початкової множини Q на підмножині Q^s.

$$Q^s = [x \mid x_j \in Q_j^s,\ Q_j^s = \{h^s_{j1}, h^s_{j2}, ..., h^s_{Ns}\},\ Q_j^s \in Q_j] \tag{4}$$

та на відокремленні у підмножині з максимальним індексом S елементів, які не можуть бути розв'язком задачі k, яка аналізується. У ході аналізу задачі k виконуються такі наступні операції:

1. Розгалуження. Якщо існує індекс j, такий, що $h^s_{j1} \ne h^s_{Ns}$, множина Q^s ділиться на дві підмножини Q^{s1} та Q^{s2} таким чином:

$$Q^{s1} = [x \mid x \in Q^s,\ h^s_{j1} \le x_j \le h^s_{j2}];$$

$$Q^{s2} = [x \mid x \in Q^s,\ h^s_{j,\,l+1} \le x_j \le h^s_{j,\,Ns}];$$

Розбиттю підлягає множина з максимальним індексом s, $s=\breve{S}$. Після того як розгалуження проведено, вважаємо $s1=\breve{S}$ $s2=\breve{S}+1$.

Надалі будемо вважати, що множина $Q^s_{j'}$ впорядкована за зростанням значення функції $f_0(x)$, тобто з $l_1<l_2$, для будь яких x^1, x^2 ,

що задовольняє такій умові:

$$x^1_{j'} = h^s_{j',l1},\ x^2_{j'} = h^s_{j',l2},\ x^1_j = x^2_j,\ j=1,...,j'-1, j+1, ..., n,$$

прямує:

$$f_0(x^1) > f_0(x^2) \tag{5}$$

Введена умова надає додаткове направлення процесу розгалуження.

Для $x^1, x^1 \in Q^{s1}$, та $x^2, x^2 \in Q^{s2}$ нерівність (5) можна розглядати як співвідношення між грубими оцінками функції цілі. У процесі роботи алгоритму розгалуженню підлягає множина Q^{s2} з максимальною оцінкою.

2. Виділення планів, які не можуть буть розв'язком задачі *k.* Не дивлячись на велике розмаїття схем послідовного аналізу варіантів, загальним для них є наявність операторів, які забезпечують виключення з подальшого розгляду підмножин планів, що не мають в собі розв'язку задачі (1). Наявність таких процедур дозволяє, в деяких випадках, суттєво (2, 4) скоротити число варіантів, які аналізуються, і, отже, підвищити, ефективність розрахунків. Алгоритм, що пропонується, передбачає застосування двох операторів $\propto_1, \propto_2$, перший з яких не дозволяє виключити з розглядання варіанти, які не задовольняють умові 1, другий - варіанти, що не задовольняють умові 2.

Нехай Φ_s, $\Phi_s = \{s+1, s+2, ...\}$ множина індексів, що не відповідають підмножинам, які не можуть бути отримані з Q^s в результаті розгалуження. Оператори $\propto$ $(\propto = \propto_1$ або $\propto_2)$ мають такі властивості:

1. $\propto (Qs) \subseteq Qs$

2. $(\propto (Qs)) = \propto (Qs)$

3. Якщо $Qs \cap G = \varnothing$, то $\exists j, j \in \Phi s, Qj \neq \varnothing, \propto 1\ (Qj) = \varnothing$.

Послідовне застосування операторів розгалуження та відокремлення з максимальним індексом *S* підмножин, які не мають в собі розв'язку задачі *k* , дозволяє на деякому кроці розгалуження отримати множину Q^S, $Q^S = \propto (Q^S)$, яка або має тільки один елемент, або пуста. В останньому випадку можливі такі ситуації:

$S > 1$ в такому випадку необхідно перейти до альтернативної множини $S -1$,

$S = 1$, у такому випадку розв'язок задачі *k* не існує (справедливість цього твердження витікає визначення операторів $\propto_1$ та $\propto_2$), $G_k = \varnothing$.

Розглянемо більш уважно ситуацію, для якої множина Q^S має тільки один елемент x^S. Справедливим є наступне твердження.

Лемма 4. (Ознака оптимальності задач *k*). Нехай $s' = min\ s \mid Q^S = x^S$. У такому разі $x^{S'}$ є розв'язком задачі *k*.

З властивості 3 оператора $\propto_1$ виходить, що $x^{S'} \in G$ і, отже задовольняє умові 1 для розв'язку задачі *k.* Покажемо, що $x^{S'}$ задовільняє також умові 2. Доведення проведемо від протилежного.

Нехай існує план x', $x' \in G^k$, такий, що $x_j^{s'} = x_{j'}$, $j=1, ..., j'-1, ..., j'+1, ..., n, j \neq j'$, та $f_0(x') > f_0(x^s)$. Зі способу побудови послідовності множин Q^s прямує існування індексу s'' який є таким:

$$s''= \min s| \; x^{s'}, x' \in Q^s \cup Q^{s-1} \cup V^s, x^s \in Q^s, x' \notin Q^s,$$

де $V^{s''}$ – множина елементів , які не були відокремлені у множині $Q^{s''}$, $Q^{s''} = \propto_2(\propto_1(\overline{Q^{s''}}))$. У відповідності до алгоритму, множини $Q^{s''-1}$ та $\overline{Q^{s''}}$ були отримані в результаті розгалуження множини $\breve{Q}^{s''}$ $\breve{Q}^{s''} = \overline{Q^{s''}} \cup Q^{s''-1}$. З означення операторів $\propto_1$ та $\propto_2$ прямує, що $x' \in V^s$. Тобто $x' \in Q^{s''-1}$. Але це неможливо, так як у такому випадку не виконується умова (7). Ми прийшли до суперечки, отже, твердження виконується.

3. Оператори $\propto_1$ та $\propto_2$. Раніше відмічалось, що розрахункові процедури, що не дозволяють виключати з множини варіантів, що розглядаються, варіанти, які не можуть бути розв'язком задачі, є невід'ємним атрибутом багатьох розрахункових схем послідовної оптимізації. Так, наприклад, у [1] змальовано ряд тестів відокремлення неприпустимих варіантів, які можуть бути використані при побудові оператора $\propto_1$. Змальовані нижче розрахункові процедури оператора $\propto_1$ та $\propto_2$ є модифікацією, що застосовується до задач k , алгоритмів відокремлення підмножин, що не мають припустимих оптимальних планів [2].

Позначимо:

$$x^{i\,min}(Q^s | \; \overline{x_{j'}}) = \arg\min f_i\,(x_1, ..., x_{j'} \; = \; \overline{x_{j'}}, ..., x_n)$$

$$x_j \in Q_j^s, j \in J(j')$$

$$x^{i\,max}(Q^s | \; \overline{x_{j'}}) = \arg\max f_i\,(x_1, ..., x_{j'} \; = \; \overline{x_{j'}}, ..., x_n)$$

$$x_j \in Q_j^s, j \in J(j')$$

де $J(j')= \{1, ..., j, ..., j'-1, j'+1, ..., n\}$.

Оператора $\overline{\propto_1}$ визначимо наступним чином: $\overline{\propto_1}(\overline{Q^s}) = \{x| \; x_j \in \; \overline{Q_j^s} \setminus \; \overline{V_j^s}\}$,

де $\overline{V_j^s} = \{x_j | \; f_i(x^{i\,max}(\overline{Q^s} | \; x_j)) < f_i^н$, або $f_i(x^{i\,min}(\overline{Q^s} | \; x_j)) > f_i^в, \exists i \; i=0, ..., m\}$. (6)

Розрахункова процедура, яку реалізує оператор $\propto_1$, полягає в послідовному використанні до Q^s оператора $\overline{\propto_1}$до тих пір, доки не буде отримано множину Q^s таку, що задовольняла б такій умові:

$$\overline{\propto_1}(Q^s)= Q^s$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатись в тому, що визначений таким чином оператор $\propto_1$ задовольняє властивостям1-3, а з (8) маємо:

$$\overline{Q^s} \setminus Q^s \not\subset G^k.$$

Позначимо, що $\theta_j(\widetilde{Q}^S)$ множина індексів елементів множини $\widetilde{Q}_j^S$, яка не задовольняє такій наступній умові:

$$\theta_j(\widetilde{Q}^S) = \{l \mid f_i\, x^{i\,max}(\widetilde{Q}^S \mid x_j = h_{jl})) \le f_i^{в},$$

$$f_i\, x^{i\,max}(\widetilde{Q}^S \mid x_j = h_{jl})) \le f_j^{н},\ \forall i,\ i = 0,\dots, m\}$$

позначимо також $\widetilde{l} = max\ l \mid l \in \theta_j(\widetilde{Q}^S)$.

Оператора $\overline{\propto}_2$ позначимо таким чином:

$$\overline{\propto}_2(\overline{Q^s}) = \{x \mid x_j \in \overline{Q_j^s} \setminus \overline{V_j^s}\},\ \text{де}\ \overline{V_j^s} = \{h^s_{jl} \mid l < \widetilde{l}\}.$$

Окрім того як і оператор $\propto_1$ оператор $\propto_2$ стоїть у послідовному використанні до множини $\widetilde{Q}^S$ оператора $\overline{\propto}_1$ до тих пір доки не буде отримано множину Q^s яка визначається за такою формулою:

$$\overline{\propto}_2(Q^s) = Q^s$$

Справедливим є наступне твердження – з $\widetilde{x} \in Q^s \setminus \propto_2(Q^s)$, з якого $\widetilde{x} \in G^k$ випливає, що $\widetilde{x}$ не задовольняє умову 2.

Дійсно, що з того, що $\widetilde{x} \in Q^s \setminus \propto_2(Q^s)$ слідує існування такої компоненти $\widetilde{x}_{j'}$ плану $\widetilde{x}$, що $\widetilde{x}_{j'} = h_{j',l}\ l < \widetilde{l}$. Розглянемо вектор $\overline{x}$ $\overline{x}_j = \widetilde{x}_{j'}\ j = 1, \dots, j'-1, j'+1, \dots, n,\ \widetilde{x}_{j'} = h_{j',l}$. Так як раніше було прийнято припущення, що будь яка множина Q_j^s впорядкована у порядку зростання функції $f_0(x)$ тобто $f_0(x) > f_0(x)$. З (9) випливає, що будь який x $x \in Q^s$ $\widetilde{x}_{j'} = h_{j',l}$, задовольняє системі умов (4) і, отже, $\overline{x} \in G^k$ Це свідчить про те, що $\widetilde{x}$ не задовольняє умові 2.

Висновки

Перш за все, треба виділити, що основний об’єм роботи розрахунків, необхідний для реалізації запропонованого алгоритму, робиться операторами розгалуження та відокремлення планів задачі, які не можуть бути її розв’ язком. Застосування різноманітних тестів відбору варіантів, які є припустимими дозволяє суттєво підвищити ефективність алгоритму типу «гілки та границі» та послідовного аналізу варіантів [1–3].

Однак, поряд з операторами, які реалізують відбір неприпустимих варіантів, алгоритми «гілок та границь» та послідовного аналізу варіантів потребують розрахунків оцінок функцій цілі для кожної підмножини, що аналізується, та пошуку серед висячих вершин дерев розв'язків вершини з максимальною оцінкою функцій цілі. Алгоритм, що пропонується, передбачає розрахунок оцінок значень функцій цілі тільки 2 рази, а сортування висячих вершин дерев розв'язків не потребує зовсім.

ЛІТЕРАТУРА

1. Сигал И. Х., Иванова А. П. Введение в прикладное дискретное программирование.– Изд-во ГРИФ МО г РФ.:– 2007.– с.387.

2. Зак Ю.А., Яхно В.М. Известия академии наук СССР «Техническая кибернетика». Последовательные алгоритмы оптимизации в задачах дискретного стохастического программирования.– М.: 1980. – №1.– с.10–17.

3. Яхно В.М. Управляющие системы и машины (УсиМ). Алгоритм ветвей и границ для задачи геометрического размещения. – Киев: 1999. – № 3. – с.20–26.

Надійшла 26.11.2009