УДК 004.021

ЗАСТОСУВАННЯ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНОГО ШЛЯХУ ГРАФУ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ МЕХАТРОННИХ СИСТЕМ

Б.Л. Шрамченко, к.т.н., с.н.с.
Київський національний університет технологій та дизайну

Ключові слова: оптимальний шлях у графі, монотонна цільова функція, оптимальна траєкторія нитки, багатошарова друкована плата, мехатронна система

Як відомо [1], мехатронні системи включають у себе механічну та електронну складову. Можливість застосування алгоритму пошуку оптимального шляху графу при розв'язанні задачі механіки, зокрема, кінематики, показана у [2], де проаналізована задача визначення оптимальної траєкторії нитки у текстильному верстаті. Застосування пошуку оптимального шляху графу при проектуванні багатошарових друкованих плат – конструктивних вузлів електронної техніки представлене у [3]. Отже, алгоритм визначення оптимального шляху графу можна вважати корисним інструментом проектування мехатронних систем.

У загальному випадку проблема пошуку оптимального шляху графу представляється наступним чином. Заданий неорієнтований граф $G = (X, R)$, у якому виділені дві вершини: s - початкова та t – кінцева. На множині P шляхів графу G визначена монотонна функція $F(p)$, $p \in P$, яка задає однозначне відображення P в поле дійсних чисел. Треба знайти $(s\text{-}t)$-шлях $p^*(s, t), p^* \in P$, на якому функція F досягає мінімального значення (такий $(s\text{-}t)$-шлях називається оптимальним); аналогічно визначається і оптимальний шлях, що з'єднує довільну пару вершин $x, y \in X$. У даному випадку під монотонністю функції F розуміють властивість, згідно з якою значення F на будь-якому шляху p не менше значення F на будь-якому підшляху $p^* \subseteq p$. Звідси безпосередньо випливає, що при розв'язанні формульованої задачі можна обмежитися розглядом лише простих шляхів.

Запропонована у [3] класифікація цільових функцій дає змогу визначити умови, при яких можливе застосування поліноміального алгоритму Дейкстри. Для випадків, коли застосування цього алгоритму не дозволяє отримати розв'язок задачі, у [3] пропонується загальна схема розв'язання, яка має експонентну асимптотичну обчислювальну складність.

У той же час у [2] при розв'язанні задачі визначення оптимальної траєкторії нитки показано, що цільова функція належить до класу γ-функцій і згідно з [3] потребує застосування загальної схеми пошуку оптимального шляху у графі відносно монотонної цільової функції. Разом з тим, у [2] запропоновано перехід від вихідної моделі у вигляді графа, вершини якого взаємно однозначно відповідають точкам зміни напряму траєкторії нитки, до допоміжного графу, вершини якого ставляться у взаємно однозначну відповідність ребрам вихідного. Корисність такого переходу визначається тим, що розв'язання вихідної задачі можна отримати застосуванням алгоритму

Дейкстри до допоміжного графу. У даному разі ціною збільшення вершин моделі досягається можливість застосування поліноміального алгоритму замість експонентного. При цьому кількість вершин допоміжного графу становить $O(n^2)$, де n – кількість вершин вихідної моделі.

У поданій роботі розв'язане питання можливості переходу від вихідного графу до деякого допоміжного для застосування поліноміального алгоритму пошуку оптимального шляху. В результаті аналізу поданої задачі встановлено, що суттєвою властивістю при розв'язанні поданої задачі є залежність приросту цільової функції F при доповненні $(s\text{-}x)$-шляху ребром (x, y) від вершин, що передують вершині y у $(s\text{-}y)$-шляху. А саме, нехай $(s\text{-}x)$-шлях має вигляд $p(s, x) = (s, x_1, x_2, \dots, x_{k-r}, x_{k-r+1}, \dots, x_{k-1}, x_k)$, де $x_k = x$, і $(s\text{-}y)$-шлях представляється послідовністю вершин $p(s, y) = (s, x_1, x_2, \dots, x_{k-r}, x_{k-r+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, y)$. Тоді приріст функції F при доповненні $(s\text{-}x)$-шляху ребром (x, y) можна представити у вигляді $\Delta F = F(p(s, y)) - F(p(s, x)) = f(x_{k-r}, x_{k-r+1}, \dots, x_{k-1}, x_k, y)$, де f - деяка дійсна функція.

Якщо $r = 0$, кажуть, що значення приросту цільової функції не залежить від передісторії процесу, функція F належить до класу α-функцій, і може бути застосований алгоритм Дейкстри. Якщо $r > 0$, допоміжний граф $H(V, U)$ будується наступним чином. Між вершинами V та послідовностями з $r + 1$ вершин $(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ таких, що (x_i, x_{i+1}), $i = 1, \dots, r$, належать R встановлюється взаємно однозначна відповідність. Дві вершини $v_1 = (x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$ та $v_2 = (x_2, x_3, \dots, x_{r+2})$ з'єднуються ребром $(v_1, v_2) \in U$ тоді і тільки тоді, коли $(x_{r+1}, x_{r+2}) \in R$. Оскільки у $H(V, U)$ перехід від будь-якої вершини $v_i \in V$ до суміжної v_j повністю визначає відповідний приріст функції F при пошуку оптимального шляху можна скористатися алгоритмом Дейкстри.

У випадку визначення оптимальної траєкторії нитки $r = 1$, тому вершини графу H відповідають двохелементним підмножинам вершин графу G, тобто ребрам. У загальному випадку кількість вершин графу H дорівнює кількості розміщень з n елементів по $r+1$ $A_n^{r+1} = n(n-1)\dots(n-r-1)$. Оскільки $A_n^{r+1} = O(n^{r+1})$ застосування алгоритму Дейкстри до графу H має поліноміальну асимптотичну складність.

Для визначення оптимального шляху для ортогонального графу [3], враховуючи, що і в цьому випадку $r = 1$, отримуємо поліноміальний алгоритм. Що стосується графу з пофарбованими вершинами, запропонований підхід не дозволяє покращити експонентну оцінку складності алгоритму.

Список використаних джерел

1. Егоров О.Д. Конструирование мехатронных модулей: Учебник. / О.Д. Егоров, Ю.В. Подураев. - М.: ИЦ МГТУ "СТАНКИН", 2004.- 360 с.

2. Щербань В.Ю. Оптимізація плоскої траєкторії нитки у апаратах текстильної галузі. / В.Ю. Щербань, Б.Л. Шрамченко, Г.В. Мельник. – К.: Вісник КНУТД, 2008, № 3, с.12-17.

3. Петренко А.И. Поиск оптимального пути графа в пространстве состояний. / А.И. Петренко, А.Я. Тетельбаум, Б.Л. Шрамченко. – М.: Известия Академии наук СССР «Техническая кибернетика», 1980, № 6, с.119-125.