

УДК 539:534.1

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ ТРЬОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ПРИ УДАРІ**

А. В. СТЕЖКО

Київський національний університет технологій та дизайну

*У статті наведено основні результати модельного дослідження динаміки системи пружних тіл при їх ударно-коливальній взаємодії. Показано методику визначення динамічних характеристик системи. Завдяки розглянутим дослідженням можна а прийнятою розрахунковою схемою вибрати необхідні параметри реальних механічних систем*

**Об'єкти та методи дослідження**

Об'єктом дослідження взято динаміку системи трьох пружних тіл в процесі їх взаємодії. Пружні тіла розглядаються тут як дискретні моделі, динамічне дослідження яких згідно з прийнятими розрахунковими схемами дає змогу визначити оптимальні параметри реальних механічних систем, у яких ударні взаємодії є основою робочого процесу.

**Постановка завдання**

Розглянемо ударні коливальні взаємодії дискретних моделей із трьома степенями вільності.

Пружні механічні системи залежно від конструктивних особливостей можуть бути приведені до дво-, трим- і багатомасової моделей. Дослідження руху динамічних систем в процесі удару із використанням дискретних моделей є важливим при визначенні низки параметрів: тривалості контактних взаємодій пружних тіл, втрати кінетичної енергії під час удару, визначення коефіцієнтів відновлення швидкості тіл, що ударяються.

**Результати та їх обговорення**

Залежно від жорсткості і конструктивних особливостей реальні механічні системи при їх ударній взаємодії можуть бути зображені дискретними моделями *a*, *b* и *v* (рис. 1). Ці тримасові моделі мають тотожне математичне відображення.

У моделях *a*, *b* і *v*, що приймаються для дослідження руху, маси  $m_1$ ,  $m_2$  та  $m_3$  з'єднані пружними елементами з лінійними характеристиками так, що при ударно-коливальній взаємодії системи здійснюється вільний рух маси  $m_3$  (рис. 1). У разі розрахункової моделі *v*:  $\frac{1}{c_3} = \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_3}$ .

На першому етапі припустимо, що вільний рух маси відбувається зі швидкістю  $V_3$ . В момент часу  $t=0$ , котрий приймається за початковий, відбувається зіткнення даної маси  $m_3$  з пружним елементом  $c_3$  (рис. 1).

У цьому випадку при ударній взаємодії розглядаються моделі (рис. 1), коливальний процес яких описується рівняннями ( $x_3 > x_2$ ):

$$\begin{aligned} m_3 \ddot{x}_3 + c_3(x_3 - x_2) &= 0; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_3 - x_1) - c_3(x_3 - x_2) &= 0; \\ m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

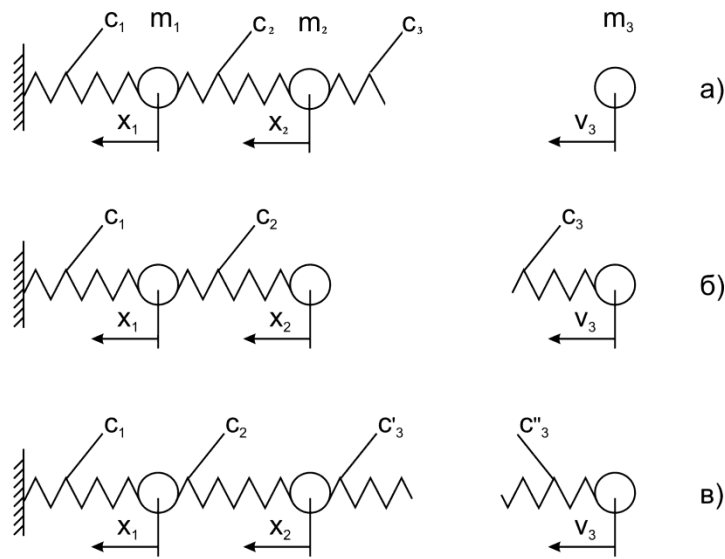


Рис.1. Дискретні тримасові динамічні моделі

Горизонтальні переміщення  $x_1, x_2, x_3$  відповідно для мас  $m_1, m_2, m_3$  запишемо у формі:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1' \cos p_1 t + A_1'' \sin p_1 t + A_2' \cos p_2 t + A_2'' \sin p_2 t + A_3' \cos p_3 t + A_3'' \sin p_3 t; \\ x_2 &= B_1' \cos p_1 t + B_1'' \sin p_1 t + B_2' \cos p_2 t + B_2'' \sin p_2 t + B_3' \cos p_3 t + B_3'' \sin p_3 t; \\ x_3 &= C_1' \cos p_1 t + C_1'' \sin p_1 t + C_2' \cos p_2 t + C_2'' \sin p_2 t + C_3' \cos p_3 t + C_3'' \sin p_3 t, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $A, B, C$  – довільні сталі, які визначаються з початкових умов

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0; & x_2(0) &= 0; & x_3(0) &= 0; \\ \dot{x}_1(0) &= 0; & \dot{x}_2(0) &= 0; & \dot{x}_3(0) &= v_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Між  $A, B$  та  $C$  мають місце співвідношення

$$A_i = k_i B_i, \quad C_i = n_i B_i, \quad (i = 1, 2, 3 \dots). \quad (4)$$

Тут:

$$k_i = \frac{\alpha^2}{p_i^2 + \omega_i^2 + \alpha^2}, \quad n_i = \frac{\omega_3^2}{-p_i^2 + \omega_3^2}, \quad \alpha^2 = \frac{\tilde{n}_2}{m_1}, \quad \omega_3^2 = \frac{\tilde{n}_3}{m_3}, \quad \omega_1^2 = \frac{\tilde{n}_1}{m_1},$$

$p_i^2$  – квадрат частоти відповідної  $i$ -ої форми коливання.

Враховуючи вираз (3), отримаємо:

$$\begin{aligned} B_1' &= 0; & B_2' &= 0; & B_3' &= 0; \\ B_1'' &= \frac{k_3 - k_2}{p_1 \psi} V_3; & B_2'' &= \frac{k_1 - k_3}{p_2 \psi} V_3; & B_3'' &= \frac{k_2 - k_1}{p_3 \psi} V_3; \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\psi = n_1(k_3 - k_2) + n_2(k_1 - k_3) + n_3(k_2 - k_1)$ .

Беручи до уваги (5), вираз (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 x_1 &= k_1 V_3 \frac{k_3 - k_2}{p_1 \psi} \sin p_1 t + k_2 V_3 \frac{k_1 - k_3}{p_2 \psi} \sin p_2 t + k_3 V_3 \frac{k_2 - k_1}{p_3 \psi} \sin p_3 t; \\
 x_2 &= V_3 \frac{k_3 - k_2}{p_1 \psi} \sin p_1 t + V_3 \frac{k_1 - k_3}{p_2 \psi} \sin p_2 t + V_3 \frac{k_2 - k_1}{p_3 \psi} \sin p_3 t; \\
 x_3 &= n_1 V_3 \frac{k_3 - k_2}{p_1 \psi} \sin p_1 t + n_2 V_3 \frac{k_1 - k_3}{p_2 \psi} \sin p_2 t + n_3 V_3 \frac{k_2 - k_1}{p_3 \psi} \sin p_3 t.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Умові відриву маси  $m_3$  відповідають рівності

$$x_3 = x_2, ; \ddot{x}_3 = 0. \tag{7}$$

Враховуючи одну з умов (7), маємо

$$\frac{k_3 - k_2}{p_1} (1 - n_1) \sin p_1 t + \frac{k_1 - k_3}{p_2} (1 - n_2) \sin p_2 t + \frac{k_2 - k_1}{p_3} (1 - n_3) \sin p_3 t = 0. \tag{8}$$

Трансцендентне рівняння остаточно набуде вигляду

$$\frac{1 - \frac{\Omega_1^2}{p_1^2}}{1 - \frac{\omega_3^2}{p_1^2}} \sin \beta + \frac{\frac{p_1^2}{p_3^2} - 1}{1 - \frac{p_2^2}{p_3^2}} \cdot \frac{1 - \frac{\Omega_1^2}{p_2^2}}{1 - \frac{\omega_3^2}{p_2^2}} \cdot \frac{p_2}{p_1} \sin \frac{p_2}{p_1} \beta + \frac{1 - \frac{p_1^2}{p_2^2}}{\frac{p_3^2}{p_2^2} - 1} \cdot \frac{1 - \frac{\Omega_1^2}{p_3^2}}{1 - \frac{\omega_3^2}{p_2^2}} \cdot \frac{p_3}{p_1} \sin \frac{p_3}{p_1} \beta = 0, \tag{9}$$

де  $\beta = p_1 t$ ;  $\Omega_1^2 = \omega_1^2 + \alpha^2$ .

Коефіцієнт відновлення швидкості при ударі визначається виразом

$$k = \frac{\dot{x}_3}{V_3}. \tag{10}$$

Підставляючи значення  $\dot{x}_3$  у вираз (10), отримаємо

$$k = \frac{a_1 \cos p_1 t + a_2 \cos p_2 t + a_3 \cos p_3 t}{a_1 + a_2 + a_3}, \tag{11}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{1 - \frac{p_1^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{\frac{\alpha^2}{p_2^2} - \frac{\alpha^2}{p_3^2}}{\left(1 - \frac{\Omega_1^2}{p_2^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{p_3^2}\right)}; & a_2 &= \frac{1}{1 - \frac{p_2^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{\frac{\alpha^2}{p_2^2} - \frac{\alpha^2}{p_1^2}}{\left(1 - \frac{\Omega_1^2}{p_1^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{p_3^2}\right)}; \\
 a_3 &= \frac{1}{1 - \frac{p_3^2}{\omega_3^2}} \cdot \frac{\frac{\alpha^2}{p_1^2} - \frac{\alpha^2}{p_2^2}}{\left(1 - \frac{\Omega_1^2}{p_2^2}\right) \left(1 - \frac{\Omega_1^2}{p_1^2}\right)}.
 \end{aligned}$$

Згідно з виразом (11) для відповідних параметрів жорсткісних характеристик залежно від співвідношення мас можна визначити коефіцієнт відновлення швидкості  $k$ .

Графік зміни коефіцієнтів відновлення швидкості  $k$  залежно від співвідношення мас  $\eta = \frac{m_2}{m_3}$

$\left( \frac{m_1}{m_2} = 1, \frac{c_1}{c_2} = 1, \frac{c_1}{c_3} = 1 \right)$  наведено на рис.2 (крива 1).

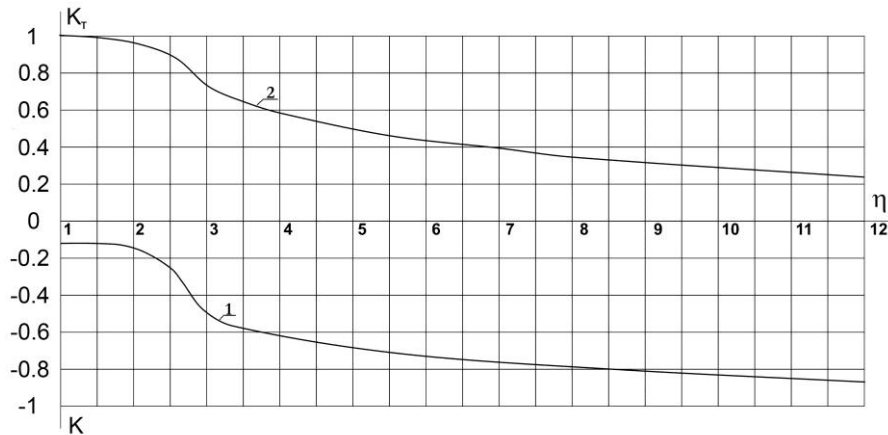


Рис.2. Графіки залежності  $K_T=K_T(\eta)$  і  $K=K(\eta)$

Передачу кінетичної енергії ударною масою  $m_3$  системі двох мас  $m_1$  та  $m_2$  (рис.1) можна визначити згідно з формулою

$$k_T = 1 - k^2, \tag{1.12}$$

де  $k_T$  – коефіцієнт втрати кінетичної енергії масою  $m_3$ .

Графік зміни коефіцієнта  $k_T$  залежно від параметра  $\eta \left( \frac{m_1}{m_2} = 1, \frac{c_1}{c_2} = 1, \frac{c_1}{c_3} = 1 \right)$  наведено на рис.2 (крива 2).

Далі розглянемо ударно-коливальні взаємодії дискретних моделей, наведених на рис.3. При фізичному представленні суцільних пружних тіл за допомогою дискретних моделей може бути реалізовано один з варіантів а, б або в, який у процесі ударно-коливального руху мас  $m_1, m_2$  та  $m_3$  можна математично описати.

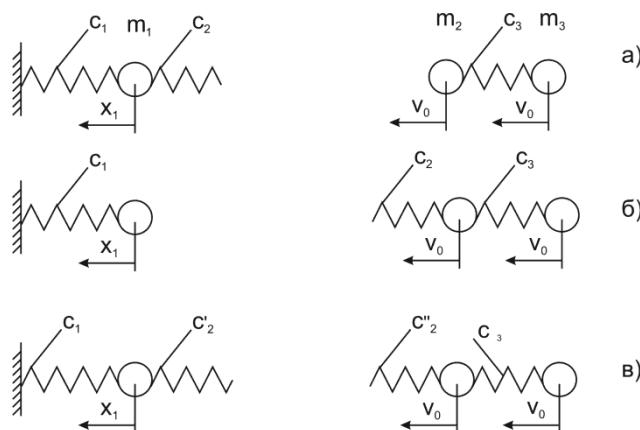


Рис.3. Режими руху тіл

У кожній із моделей в початковий момент часу реалізується вільний рух мас  $m_2$  і  $m_3$  зі швидкістю  $V_0$ . Тут також елементи  $c_1, c_2, c_3$  мають лінійні характеристики, хоча сама задача є нелінійною.

В розрахунковому випадку в)  $\frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_2}$  для вільного руху мас  $m_2$  і  $m_3$  зі швидкістю  $V_0$

маємо такі початкові умови:

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0; \quad x_3(0) = 0; \\ \dot{x}_1(0) = 0; \\ \dot{x}_2(0) = 0; \\ \dot{x}_3(0) = V_0. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Враховуючи (2) та (13), вирази для переміщення запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 &= B_1'' k_1 \sin p_1 t + B_2'' k_2 \sin p_2 t + B_3'' k_3 \sin p_3 t; \\ x_2 &= B_1'' \sin p_1 t + B_2'' \sin p_2 t + B_3'' \sin p_3 t; \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$x_3 = B_1'' n_1 \sin p_1 t + B_2'' n_2 \sin p_2 t + B_3'' n_3 \sin p_3 t,$$

де 
$$B_1'' = \frac{V_0}{p_1 \psi} [(k_2 n_3 - k_3 n_2) + (k_3 - k_2)],$$

$$B_2'' = \frac{V_0}{p_2 \psi} [(k_3 n_1 - k_1 n_3) + (k_1 - k_3)],$$

$$B_3'' = \frac{V_0}{p_3 \psi} [(k_1 n_2 - k_2 n_1) + (k_2 - k_1)].$$

Умова відриву системи мас  $m_2$  і  $m_3$ , зв'язаних пружним елементом  $c_3$  має вигляд:

$$x_1 = x_2. \quad (15)$$

Враховуючи (15), отримаємо:

$$\alpha_1 (\beta_2 - \beta_3) \sin p_1 t + \alpha_2 (\beta_3 - \beta_1) \sin p_2 t + \alpha_3 (\beta_1 - \beta_2) \sin p_3 t = 0. \quad (16)$$

Тут 
$$\alpha_i = \frac{\omega_1^2 - p_i^2}{p_i}; \quad \beta_i = \frac{p_i^2 (\Omega_1^2 - p_i^2)}{\omega_3^2 - p_i^2}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Остаточно трансцендентне рівняння (16) перепишемо так:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1 - \frac{p_1^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{p_3}{p_1} \left[ \frac{1 - \frac{\Omega_1^2}{p_3^2} + \frac{p_2^2 \left( \frac{\Omega_1^2}{p_2^2} - 1 \right)}{\omega_3^2 - 1} \right]}{1 - \frac{p_3^2}{\omega_1^2}} \right] \sin p_1 t + \frac{1 - \frac{p_2^2}{\omega_1^2} \cdot \frac{p_3}{p_2} \left[ \frac{p_1^2 \cdot \frac{1 - \frac{\Omega_1^2}{p_3^2} + \frac{\Omega_1^2}{p_3^2} - 1}{\omega_3^2 - 1} + \frac{p_3^2}{\omega_3^2 - 1} \right]}{1 - \frac{p_3^2}{\omega_1^2}} \right] \sin p_2 t + \\ & + \left[ \frac{p_2^2 \cdot \frac{\Omega_1^2}{p_3^2} - 1}{\omega_3^2 - 1} + \frac{p_1^2 \cdot \frac{\Omega_1^2}{p_3^2} - 1}{\omega_3^2 - 1} \right] \sin p_3 t = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Трансцендентне рівняння (17) дає можливість визначити час контактної взаємодії тримасової досліджуваної моделі (рис.3).

Вираз для визначення коефіцієнтів відновлення швидкості у випадку розрахункової моделі (рис.3) можна записати у вигляді

$$k = \frac{m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3}{V_0(m_2 + m_3)}. \quad (18)$$

Беручи до уваги (2.2), отримаємо

$$\begin{aligned} k = \frac{1}{\psi(1+\eta)} & [(k_3 - k_2 + k_2 n_3 - k_3 n_2)(1 + n_1 \eta) \cos p_1 t + (k_1 - k_3 + k_3 n_1 - k_1 n_3)(1 + n_2 \eta) \cos p_2 t + \\ & + (k_2 - k_1 + k_1 n_2 - n_1 k_2)(1 + n_3 \eta) \cos p_3 t], \end{aligned} \quad (1.19)$$

де  $\eta = \frac{m_3}{m_2}$ .

Формула (19) дає можливість оцінити втрату кінетичної енергії системою двох мас при ударно-коливальній взаємодії тримасової моделі, що розглядається (рис.3).

Так, наприклад, для розрахункової моделі, що має параметри:  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_2} = 1$ ,  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_3}{c_2} = 1$  із

виразу (17) отримаємо  $\beta = p_1 t = 3,149$ . При цьому коефіцієнт відновлення швидкості згідно з виразом (19) матиме таке значення:  $k = -0,825$ , а коефіцієнт втрати кінетичної енергії системою мас  $m_2$  та  $m_3$   $k_T = 0,320$ .

**Висновки**

Показана методика визначення динамічних характеристик системи. Проведені дослідження тривалості взаємодій пружних тіл можуть бути використані при проектуванні петлетвірних систем в'язання машин, зокрема круглов'язальних.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел.– К.:Наукова думка, 1969. – 240 с.
2. Баргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1979. – 702 с.

Надійшла 26.02.2009